



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105

78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Coll. D.I.
Rapports de Recherche

N° 751

QUATERNIONS ET CONTROLE SUR L'ESPACE DES ROTATIONS

Michel LE BORGNE

NOVEMBRE 1987

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Quaternions et Contrôle sur l'Espace des Rotations

Michel Le Borgne

Octobre 1987

Publication Interne n° 377 - Octobre 1987 - 56 pages.

Résumé: Ce rapport présente dans ses trois premiers chapitres un certain nombre de propriétés plus ou moins connues ou méconnues des quaternions et des rotations. Ces propriétés sont ensuite utilisées dans la commande de systèmes évoluant sur l'espace des rotations. Ces commandes sont basées en outre sur la notion de géodésique et de plus court chemin.

Quaternions and Control on Rotations Space

Abstract: Geometrical properties of quaternions and rotations are investigated. Some of them are derived in an original way. These properties are then used in the study of control laws for dynamical systems having the space of rotations as state space. Geodesics and shortest path are the main tools used in the synthesis of control laws.

1. LES QUATERNIONS

1.1. Définition et propriétés élémentaires

Les quaternions forment un corps non commutatif H obtenu de la manière suivante:

L'ensemble sous-jacent est R^4 avec la base canonique notée $\{1, i, j, k\}$. L'addition est l'addition de R^4 et la multiplication est obtenue en prolongeant par linéarité les formules:

$$1.1=1 ; 1.i=i ; 1.j=j ; 1.k=k$$

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$i.j=-j.i=k ; j.k=-k.j=i ; k.i=-i.k=j$$

On vérifie que l'on obtient ainsi une structure de corps non commutatif sur R^4 . Le corps des quaternions contient un sous-corps commutatif $R.1$ trivialement isomorphe à R et un sous espace vectoriel sur ce sous corps, $R.i+R.j+R.k$ que l'on assimilera à R^3 . Ce sous ensemble est appelé ensemble des quaternions purs. Nous pouvons donc considérer tout réel et tout vecteur de R^3 comme des quaternions. Tout quaternion s'écrit comme la somme d'un scalaire et d'un vecteur:

$$\lambda = R(\lambda) + P(\lambda)$$

ou $R(\lambda)$ est appelée partie réelle de λ et $P(\lambda)$ est appelée partie pure de λ .

On définit alors, comme pour les complexes, l'opération de conjugaison :

$$\bar{\lambda} = R(\lambda) - P(\lambda).$$

PROPRIETES DE LA CONJUGAISON

$$\bar{\bar{\lambda}} = \lambda ; \lambda = \bar{\lambda} \iff \lambda \in R;$$

$$\lambda = -\bar{\lambda} \iff \lambda \in R^3 ;$$

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu};$$

$$\overline{\lambda \cdot \mu} = \bar{\mu} \bar{\lambda}.$$

(Attention H n'est pas commutatif.)

Les démonstrations sont élémentaires.

PROPRIETES UTILES

$$\lambda \in R^3 \iff \lambda^2 \in R_-;$$

$$\lambda \in R \iff \lambda^2 \in R_+.$$



PRODUIT SCALAIRE ET NORME.

Le produit scalaire de \mathbf{R}^4 peut s'écrire:

$$\langle \lambda, \mu \rangle = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}\mu + \bar{\mu}\lambda)$$

La norme correspondante étant $\|\lambda\| = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}}$. Cette norme est compatible avec le produit des quaternions au sens où $\|\lambda \cdot \mu\| = \|\lambda\| \cdot \|\mu\|$. Les quaternions possèdent donc une structure d'algèbre normée.

Nous avons également pour tout quaternion non nul:

$$\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{\|\lambda\|^2}$$

L'ensemble des quaternions unitaires a une structure de groupe multiplicatif - non commutatif -. Notons enfin, qu'en restriction aux quaternions purs, le produit scalaire coïncide avec le produit scalaire habituel de \mathbf{R}^3 .

1.2. Produit des quaternions et opérations vectorielles

Tout quaternion pouvant s'écrire $\alpha + t$ avec α élément de \mathbf{R} et t vecteur de \mathbf{R}^3 , il est tentant d'écrire le produit de deux quaternions à l'aide des opérations vectorielles (produit scalaire, produit vectoriel, somme et produit par un scalaire).

Soient

$$\lambda_1 = \alpha_1 + t_1$$

$$\lambda_2 = \alpha_2 + t_2$$

alors

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \lambda_2 &= (\alpha_1 + t_1)(\alpha_2 + t_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_1 + t_1 t_2\end{aligned}$$

Si nous posons :

$$t_1 = a_1.i + b_1.j + c_1.k$$

$$t_2 = a_2.i + b_2.j + c_3.k$$

nous pouvons exprimer le produit $t_1 t_2$:

$$\begin{aligned} t_1 t_2 &= -a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k + (a_2 c_1 - a_1 c_2)j + (b_1 c_2 - b_2 c_1)i \\ &= \langle t_1 | t_2 \rangle + t_1 \times t_2 \end{aligned}$$

ou $\langle t_1 | t_2 \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^3 et $t_1 \times t_2$ le produit vectoriel. Ceci donne la décomposition du produit en partie réelle et partie pure:

$$(\alpha_1 + t_1)(\alpha_2 + t_2) = [\alpha_1 \alpha_2 - \langle t_1 | t_2 \rangle] + [t_1 \times t_2 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_1] \quad (1.1)$$

En particulier si v_1 et v_2 sont deux vecteurs de \mathbf{R}^3 (que nous appellerons simplement vecteurs par la suite):

$$v_1 v_2 = \langle v_1 | v_2 \rangle + v_1 \times v_2$$

Introduisant le commutateur de deux quaternions, $[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_1$, nous pouvons exprimer le produit scalaire et le produit vectoriel en fonction du produit des quaternions :

$$\begin{aligned} \langle v_1 | v_2 \rangle &= \frac{-1}{2} (v_1 v_2 + v_2 v_1) \\ v_1 \times v_2 &= \frac{1}{2} [v_1, v_2] \end{aligned}$$

La formule (1.1) montre également que deux quaternions commutent si et seulement si les parties pures sont colinéaires.

1.3. Propriétés diverses - différentiation

Sur le groupe des quaternions unitaires nous utiliserons les automorphismes intérieurs pour représenter les rotations. Si λ est un quaternion unitaire $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$.

PROPRIETE

Pour tous quaternions λ, μ on a:

$$P(\lambda \mu \bar{\lambda}) = \lambda P(\mu) \bar{\lambda}$$

Nous aurons également besoin de différentier des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{H} . Si $t \rightarrow \lambda(t)$ est une telle fonction, la dérivée est prise au sens habituel d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^4 .

PROPRIETES

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mu) = \frac{d\lambda}{dt}\mu + \lambda\frac{d\mu}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\lambda}) = \overline{\frac{d\lambda}{dt}}$$

La première formule se démontre à partir de l'expression du produit de 2 quaternions (1.1). La seconde est triviale.

1.4. Exponentielle de quaternions

Le corps des quaternions étant muni d'une structure d'algèbre normée, l'exponentielle d'un quaternion se définit par la formule usuelle:

$$\exp(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} + \dots$$

La série est normalement convergente. Le produit des quaternions étant non commutatif, l'exponentielle sur les quaternions a grosso-modo les memes propriétés (ou absence de propriétés) que l'exponentielle des matrices. En particulier si λ et μ commutent,

$$\exp(\lambda + \mu) = \exp(\lambda)\exp(\mu)$$

Cette égalité est fausse en général. Si t est un scalaire on a bien $\frac{d}{dt}\exp(\lambda t) = \lambda\exp(\lambda t)$, mais par contre si $\lambda(t)$ est une fonction de t , en général $\frac{d}{dt}(\exp(\lambda(t))) \neq \frac{d\lambda}{dt}\exp(\lambda(t))$ sauf si λ et $\frac{d\lambda}{dt}$ commutent.

Un cas particulier intéressant est celui où le quaternion est un vecteur:

PROPRIETE

Si v est un vecteur, $\exp(v)$ est un quaternion de norme 1. Plus précisément

$$\exp(v) = \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|}\sin(\|v\|)$$

Pour le démontrer calculons les puissances successives d'un vecteur:

$$v^2 = (-\|v\|^2, 0)$$

La première composante du couple est la partie réelle du quaternion, la seconde la partie pure.

$$v^3 = (0, -\|v\|^2 v)$$

$$v^4 = (\|v\|^4, 0)$$

On en déduit:

$$R(\exp(v)) = 1 - \frac{\|v\|^2}{2!} + \frac{\|v\|^4}{4!} - \dots$$

$$P(\exp(v)) = \frac{v}{\|v\|} (\|v\| - \frac{\|v\|^3}{3!} + \dots)$$

1.5. Représentation des rotations par les quaternions unitaires

Le groupe des quaternions unitaires est la sphère S^3 de dimension 3. Nous pouvons faire opérer ce groupe sur le corps des quaternions par :

$$S^3 \times H \longrightarrow H$$

$$(\lambda, \mu) \longmapsto \lambda \mu \lambda^{-1}$$

A chaque quaternion unitaire λ est donc associée une application ρ_λ de H dans lui même. Les résultats suivants sont classiques et se démontrent sans peine:

PROPRIETE

a) L'application ρ_λ laisse \mathbf{R}^3 (assimilé à l'ensemble des quaternions purs) invariant et la restriction de ρ_λ à \mathbf{R}^3 est une rotation.

b) $\rho_\lambda = \rho_{\lambda'}$ équivaut à $\lambda = \varepsilon \lambda'$ ($\varepsilon = \pm 1$)

c) Pour toute rotation $r \in SO_3$ il existe un quaternion

$$\lambda \in S^3 \text{ tel que } r = \rho_\lambda$$

Nous avons donc une application π de la sphère S^3 sur le groupe des rotations de \mathbf{R}^3 définie par

$$\pi(\lambda) = \rho_\lambda$$

PROPRIETE

L'application π est un homomorphisme de groupes surjectif, de noyau $\{\pm 1\}$

Toute rotation peut donc être représentée par un quaternion unitaire et au produit des quaternions correspond le produit des rotations associées. L'image réciproque par π de toute rotation contient deux quaternions λ et $-\lambda$. Malheureusement il n'existe pas de façon raisonnable de choisir parmi ces deux représentations. Plus précisément:

PROPRIÉTÉ

Il n'existe aucun relèvement $f: SO^3 \rightarrow S^3$ de l'application π (i.e. vérifiant $\pi \circ f = Id_{SO^3}$) qui soit ou continu, ou un homomorphisme de groupe.

1.6. Détermination des éléments géométriques d'une rotation représentée par un quaternion unitaire.

Soit $r = \pi(\lambda)$ une rotation représentée par le quaternion λ . Nous nous proposons de déterminer l'axe et l'angle de la rotation r à partir de λ .

Posons donc $\lambda = \alpha + t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^3$. Un calcul direct montre que $\lambda t \lambda^{-1} = t$. Le vecteur t appartient donc à l'axe de la rotation. Soit maintenant u un vecteur unitaire orthogonal à t et Θ l'angle de la rotation mesuré dans le plan orthogonal à t orienté par le vecteur normal t . Alors :

$$\begin{aligned} \cos(\Theta) &= \langle u | r(u) \rangle = -\frac{1}{2} (u \lambda u \lambda^{-1} + \lambda u \lambda^{-1} u) \\ &= \alpha^2 - \|t\|^2 \\ u \times r(u) &= \frac{t}{\|t\|} \sin(\Theta) = \frac{1}{2} [u, \lambda u \lambda^{-1}] \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\begin{aligned} \cos(\Theta) &= \alpha^2 - \|t\|^2 \\ \sin(\Theta) &= 2\alpha\|t\| \end{aligned}$$

Comme $\alpha^2 + \|t\|^2 = 1$ il est possible de poser:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(\Phi) \\ \|t\| &= \sin(\Phi) \quad 0 \leq \Phi \leq \pi \end{aligned}$$

Les relations précédentes montrent que $\Theta = 2\Phi$

En conclusion, si une rotation r est représentée par le quaternion $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, son axe est dirigé par le vecteur de composantes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans la base $\{i, j, k\}$ et son angle, mesuré dans l'orientation induite par $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est $2\text{Arcos}(\lambda_0)$.

Maintenant si nous considérons l'autre représentation de la rotation $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$, nous voyons que le passage de l'une à l'autre correspond à un changement d'orientation de l'axe de la rotation. Aux deux déterminations possibles d'une rotation par un vecteur unitaire de l'axe et l'angle, correspondent donc les deux représentations par des quaternions unitaires.

REPRESENTATION D'UNE ROTATION DONNEE

Si une rotation r est donnée par un vecteur unitaire t de l'axe et son angle Θ , les considérations précédentes montrent qu'un représentant de r est:

$$\lambda = \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) t$$

ou encore:

$$\lambda = \exp\left(\frac{\Theta}{2} t\right)$$

PASSAGE DE LA REPRESENTATION QUATERNION A LA REPRESENTATION MATRICIELLE

Ce calcul ne présente aucune difficulté. Si $r = \pi((\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3))$ la matrice associée dans la base $\{i, j, k\}$ est:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_0) & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

PASSAGE DE LA REPRESENTATION MATRICIELLE A LA REPRESENTATION QUATERNION

Soit R la matrice d'une rotation. Nous avons les relations bien connues:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R) &= 1 + 2\cos(\Phi) \\ \frac{1}{2}(R - R') &= \sin(\Phi)\tilde{u} \end{aligned}$$

ou $\text{tr}(R)$ représente la trace de R , u un vecteur unitaire de l'axe de la rotation et Φ la mesure de

l'angle de rotation dans l'orientation donnée par u . Compte tenu des relations vues précédemment il vient:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(R)}$$

$$AS \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \text{tr}(R)}} (R - R')$$

Remarque 1

Si $\text{tr}(R) = -1$, $\Phi = \pi$ et $(R - R') = 0$; la deuxième expression n'est alors pas définie. Un quaternion représentant une rotation d'angle π est de la forme $(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Si $R = [c_1, c_2, c_3]$ où c_i représente la i 'ème colonne de la matrice R , il est facile de vérifier qu'un quaternion représentant la rotation R est un vecteur non nul parmi $[i + c_1j + c_2k + c_3]$ divisé par sa norme. Un tel vecteur existe toujours.

Remarque 2

Il est possible de calculer directement le vecteur correspondant à la matrice antisymétrique $R - R'$ à partir des colonnes de la matrice de rotation R . Si $R = [c_1, c_2, c_3]$ où c_i représente la i ème colonne de la matrice R et si i, j, k est la base canonique de \mathbf{R}^3 , alors:

$$\frac{1}{2} (R - R') = AS \left(\frac{1}{2} (i \times c_1 + j \times c_2 + k \times c_3) \right)$$

et

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tr}(R)}} (i \times c_1 + j \times c_2 + k \times c_3)$$

2. ASPECTS DIFFERENTIEL DES QUATERNIONS

2.1. Différentielle de l'application π - Vitesse de rotation et quaternion dérivé.

Nous nous proposons de calculer la différentielle de l'application

$$\pi: S^3 \longrightarrow SO_3$$

Pour cela soit λ un quaternion unité et $t \longrightarrow \lambda(t)$ un chemin différentiable défini sur $] -1, +1[$ tel que $\lambda(0) = \lambda$ et pour tout t , $\lambda(t)$ est unitaire. $t \longrightarrow \pi(\lambda(t))$ est alors un chemin différentiable sur SO_3 . Soit $R(t)$ la matrice orthogonale représentant $\pi(\lambda(t))$. Nous avons alors pour tout vecteur u constant:

$$\frac{dR(t)}{dt} u = \omega(t) \times R(t) u$$

où $\omega(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 . En assimilant les différents vecteurs à des quaternions nous obtenons:

$$\left. \frac{dR(t)u}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} [\omega(0), R(0)u] = \frac{1}{2} [\omega(0), \lambda u \lambda^{-1}]$$

D'autre part, $R(t)u$ s'exprime en quaternions par:

$$R(t)u = \lambda u \lambda^{-1}$$

ce qui donne en différentiant

$$\frac{dR(t)u}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} u \lambda^{-1} + \lambda u \frac{d\lambda^{-1}}{dt}$$

de $\lambda \lambda^{-1} = 1$ nous tirons : $\frac{d\lambda^{-1}}{dt} = -\lambda^{-1} \frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1}$. En reportant tout dans l'équation précédente il vient:

$$\frac{dR(t)u}{dt} = \left[\frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1}, \lambda u \lambda^{-1} \right]$$

Maintenant posons $\lambda = \alpha + v$ où α est la partie réelle de λ et v sa partie pure. Il vient alors:

$$\frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1} = \left[\alpha \frac{d\alpha}{dt} + v \frac{dv}{dt}, -v \times \frac{dv}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} v + \alpha \frac{dv}{dt} \right]$$

mais

$$\lambda \bar{\lambda} = \alpha^2 + v.v = 1$$

d'où il résulte:

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + v \frac{dv}{dt} = 0$$

Ce qui montre que $\frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1}$ est un quaternion pur quand $\lambda(t)$ est un chemin sur la sphère unité.

Nous obtenons donc pour tout vecteur u :

$$\frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1} \times \lambda u \lambda^{-1} = \frac{1}{2} \omega \times \lambda u \lambda^{-1}$$

et par conséquent:

$$\omega = 2 \frac{d\lambda}{dt} \lambda^{-1} \quad ; \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega \lambda$$

Remarque: ω est ici exprimée dans le repère de référence $\{i, j, k\}$.

Comme d'autre part:

$$d\pi|_{\lambda} \left[\frac{d\lambda}{dt} \right] = \frac{dR(t)}{dt}$$

et compte tenu des isomorphismes canoniques entre R^3 et $TSO^3|_{\pi(\lambda)}$ pour tout λ , les relations précédentes permettent d'obtenir l'expression de la différentielle de π .

Soit $(\dot{\lambda}_0, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3)$ le vecteur dérivé de $\lambda(t)$ au point $t=0$. L'expression de la vitesse ω obtenue ci dessus s'expande en:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2[-\lambda_1 \dot{\lambda}_0 + \lambda_0 \dot{\lambda}_1 - \lambda_3 \dot{\lambda}_2 + \lambda_2 \dot{\lambda}_3] \\ \omega_2 &= 2[-\lambda_2 \dot{\lambda}_0 + \lambda_3 \dot{\lambda}_1 + \lambda_0 \dot{\lambda}_2 - \lambda_1 \dot{\lambda}_3] \\ \omega_3 &= 2[-\lambda_3 \dot{\lambda}_0 - \lambda_2 \dot{\lambda}_1 + \lambda_1 \dot{\lambda}_2 + \lambda_0 \dot{\lambda}_3] \end{aligned}$$

ou encore:

$$d\pi|_{\lambda} = 2 \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Contrairement aux apparences , cette application va d'un espace de dimension 3 $\left[TS^3|_{\lambda} \right]$ dans un espace de dimension 3. Nous avons en effet:

$$\lambda_0 \dot{\lambda}_0 + \lambda_1 \dot{\lambda}_1 + \lambda_2 \dot{\lambda}_2 + \lambda_3 \dot{\lambda}_3 = 0$$

La seconde relation obtenue permet d'exprimer le quaternion dérivé en fonction de la vitesse de rotation sous la forme

$$\dot{\lambda} = M(\lambda)\omega$$

avec:

$$M(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier les relations suivantes:

$$\lambda_0 \dot{\lambda}_0 + \lambda_1 \dot{\lambda}_1 + \lambda_2 \dot{\lambda}_2 + \lambda_3 \dot{\lambda}_3 = 0$$

pour tout $\dot{\lambda}$ image d'un vecteur ω par $M(\lambda)$ et:

$$d\pi_{|\lambda}^1 M(\lambda) = Id_3$$

où Id_3 désigne l'identité de $M_3(\mathbf{R})$.

La première relation montre que l'application définie par $M(\lambda)$ envoie les vitesses de rotation sur des vitesses tangentes à la sphère unité.

La seconde relation montre que $M(\lambda)$ est un inverse à droite de $d\pi_{|\lambda}^1$, prouvant que cette dernière application est surjective pour tout λ . Il en résulte qu'elle est bijective car les deux variétés S^3 et SO_3 sont de même dimension. L'application π n'a donc pas de singularité et se trouve être en chaque point un difféomorphisme local. Ce n'est évidemment pas un difféomorphisme global car π n'est même pas injective!. Cette situation est générale : si on construit l'espace projectif $P_{n-1}(\mathbf{R})$ comme quotient de S_{n-1} par la relation antipodale, l'application projection canonique est un difféomorphisme local mais non global. C'est en fait un revêtement à deux feuillets.

Remarquons également que $M(\lambda)$ n'est pas une matrice carrée car les applications considérées sont toutes exprimées dans le sur-espace \mathbf{H} des quaternions qui est de dimension quatre.

2.2. Problèmes de moments

Si on désire utiliser les quaternions pour traiter des questions de mécanique ou de commande dans l'espace SO_3 en utilisant des interprétations mécaniques, il est nécessaire de transformer l'espace des "efforts angulaires" en un espace d'efforts sur les quaternions.

Le problème est facile à résoudre si on se souvient que dans le principe des travaux virtuels, les efforts sont modélisés par des formes linéaires sur l'espace des vitesses - donc l'espace tangent à la variété de configuration. Ces efforts sont par conséquent modélisés par les formes différentielles sur la variété.

Considérons, pour fixer les idées, un solide à point fixe dont la position est repérée par la rotation $\pi(\lambda)$. Si ce solide est soumis à un effort modélisé par un moment

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

correspondant à la forme différentielle sur SO_3

$$m_1 d\omega_1 + m_2 d\omega_2 + m_3 d\omega_3,$$

il suffit pour résoudre le problème de transformer cette forme différentielle en la forme correspondante sur la sphère S^3 . Ceci se fait par l'application transposée:

$$d\pi_{|\lambda}^* : TSO_{|\pi(\lambda)}^{3|} \longrightarrow TS_{|\lambda}^{3|}$$

et donc les composantes de la forme différentielle cherchée sont dans la base canonique de $TSO_{|\pi(\lambda)}^{3|}$

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

2.3. Questions métriques

Considérons une structure Riemanienne sur SO_3 définie par la matrice symétrique définie positive $S(r)$ du produit scalaire sur $TSO_r^{3|}$. L'application π étant un difféomorphisme local, il est possible de transporter cette structure sur la sphère S^3

Si x et y sont deux vecteurs de $TS_{|\lambda}^{3|}$, l'égalité

$$\langle x|y \rangle = \langle d\pi_{|\lambda}^*(x) | d\pi_{|\lambda}^*(y) \rangle_{S(r)}$$

défini un produit scalaire sur $TS^3|_{\lambda}$ de matrice associée:

$$d\pi|_{\lambda}^t S(\pi(\lambda)) d\pi|_{\lambda}$$

(La vérification est immédiate).

Dans le cas où SO_3 est muni de sa structure canonique, ie quand $S(r)=Id$, nous obtenons pour structure correspondante sur S^3 :

$$d\pi|_{\lambda}^t(\lambda)d\pi|_{\lambda}(\lambda) = 4 \begin{bmatrix} \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 & -\lambda_1\lambda_0 & -\lambda_2\lambda_0 & -\lambda_3\lambda_0 \\ -\lambda_1\lambda_0 & \lambda_0^2+\lambda_3^2+\lambda_2^2 & -\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_3 \\ -\lambda_2\lambda_0 & -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_3^2 & -\lambda_2\lambda_3 \\ -\lambda_3\lambda_0 & -\lambda_1\lambda_3 & -\lambda_2\lambda_3 & \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

Pour avoir une expression plus simple du produit scalaire prenons en compte l'appartenance de x et y à l'espace tangent $TS^3|_{\lambda}$ i.e.

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0$$

Les vecteurs x et y appartenant au noyau de la forme linéaire

$$d\lambda = \lambda_0 d\lambda_0 + \lambda_1 d\lambda_1 + \lambda_2 d\lambda_2 + \lambda_3 d\lambda_3$$

ils sont orthogonaux pour la forme bilinéaire $4(d\lambda \otimes d\lambda)$. Leur produit scalaire est donc:

$$y^t \left(d\pi|_{\lambda}^t d\pi|_{\lambda} + 4(d\lambda \otimes d\lambda) \right) x = y^t (4Id_4) x$$

Le calcul est immédiat en utilisant la forme matricielle et en tenant compte de:

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$$

Le produit scalaire transporté de $TSO^3|_{\pi(\lambda)}$ sur $TS^3|_{\lambda}$ coïncide donc , au facteur 4 près , avec le produit scalaire induit par le produit scalaire canonique de $TH|_{\lambda}$.

2.4. Un atlas pour la sphère S^3

Nous avons défini en 1.4 l'exponentielle sur l'algèbre des quaternions et montré que l'exponentielle d'un vecteur est un quaternion unitaire. Il est possible d'utiliser cette dernière propriété pour obtenir un atlas de la sphère S^3 .

Considérons l'application:

$$\begin{array}{ccc} \{\|v\| < \pi\} & \longrightarrow & S^3 \\ v & \longrightarrow & \exp(v) \end{array}$$

Cette application est injective et son image est:

$$S^3 - \{(-1, 0, 0, 0)\}$$

L'application réciproque est donnée par:

$$\begin{cases} v = \frac{\text{Arcos}(\lambda_0)}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} P(\lambda) & \text{si } \lambda_0 \neq 1 \\ v = 0 & \text{si } \lambda_0 = 1 \end{cases}$$

et est continue de $S^3 - \{(-1, 0, 0, 0)\}$ dans $\{\|v\| < \pi\}$.

Nous avons ainsi une première carte ϕ_1 . Pour en obtenir une seconde ϕ_2 autour de $(-1, 0, 0, 0)$ cette fois il suffit de prendre l'application:

$$\begin{array}{ccc} \{\|v\| < \pi\} & \longrightarrow & S^3 \\ v & \longrightarrow & -\exp(v) \end{array}$$

dont l'image est $S^3 - \{(1, 0, 0, 0)\}$ et l'application réciproque l'opposée de celle de ϕ_1 .

Les changements de carte se calculent facilement:

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_2^{-1} &= - \frac{(\pi - \|v\|)}{\|v\|} v \quad \text{pour } v \neq 0 \\ \phi_2 \circ \phi_1^{-1} &= - \frac{(\pi - \|v\|)}{\|v\|} v \quad \text{pour } v \neq 0 \end{aligned}$$

Les deux changements de carte sont donc identiques et il est facile de vérifier qu'ils sont C^∞ sur $\{v \neq 0\}$.

2.5. Expression d'un vecteur vitesse de rotation dans la carte ϕ_1

La relation obtenue en 2.1 entre vitesse de rotation et vecteur tangent à S^3 en λ est un isomor-

phisme entre \mathbf{R}^3 et $TS^3|_{\lambda}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & TS^3|_{\lambda} \\ \omega & \longrightarrow & \frac{1}{2}\omega\lambda \end{array}$$

Si $\lambda = \phi_1(v) = \exp(v)$, il peut être intéressant d'exprimer ω dans les coordonnées locales définies par cette carte. Pour cela il est nécessaire de calculer le Jacobien de ϕ_1^{-1} . Il vient immédiatement:

$$J\phi_1^{-1}|_{\exp(v)} = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{\|v\|\sin(\|v\|)} & \frac{\|v\|}{\sin(\|v\|)} & 0 & 0 \\ -\frac{v_2}{\|v\|\sin(\|v\|)} & 0 & \frac{\|v\|}{\sin(\|v\|)} & 0 \\ -\frac{v_3}{\|v\|\sin(\|v\|)} & 0 & 0 & \frac{\|v\|}{\sin(\|v\|)} \end{bmatrix}$$

La première colonne s'obtient en écrivant:

$$\phi_1(\lambda) = \frac{\text{Arcos}(\lambda_0)}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} P(\lambda) = \text{Arcos}(\lambda_0) \frac{P(\lambda)}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$$

en dérivant par rapport à λ_0 et en exprimant tout en fonction de v .

L'expression du jacobien ainsi obtenue n'est pas définie pour $v=0$, soit $\lambda=(1,0,0,0)$. En fait nous avons exprimé ϕ_1^{-1} et $T\phi_1^{-1}$ dans l'espace ambiant \mathbf{H} alors qu'il s'agit d'une application de S^3 dans \mathbf{R}^3 . Les seuls vecteurs de $TH|_{\lambda}$ à considérer sont les vecteurs orthogonaux à λ et au point $\lambda=(1,0,0,0)$ ces vecteurs ont leur première composante nulle. La singularité dans l'expression obtenue ne pose donc pas de problème.

Maintenant, si un vecteur tangent à la sphère S^3 au point λ est de la forme $\frac{1}{2}\omega\lambda = \frac{1}{2}(-\omega.P(\lambda) + \omega \times P(\lambda) + \lambda_0\omega)$, son expression dans la base $\{D_1\phi_1, D_2\phi_1, D_3\phi_1\}$ formée des trois dérivations partielles dans les coordonnées ϕ_1 sera :

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(\omega.P(\lambda)) \frac{v}{\|v\|\sin(\|v\|)} + \frac{1}{2}\omega \times P(\lambda) \frac{\|v\|}{\sin\|v\|} + \frac{1}{2}\lambda_0\omega \frac{\|v\|}{\sin\|v\|}$$

où encore, compte tenu de

$$\lambda_0 = \cos(\|v\|) \quad \text{et} \quad P(\lambda) = \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2} \frac{(\omega \cdot v)}{\|v\|^2} v + \frac{1}{2} \omega \times v + \omega \frac{\cos(\|v\|)}{2} \frac{\|v\|}{\sin\|v\|}$$

En utilisant la formule du double produit vectoriel, nous obtenons:

$$v \times (v \times \omega) = (\omega \times v) \times v = (\omega \cdot v) v - \|v\|^2 \omega$$

et

$$\frac{(\omega \cdot v)}{\|v\|^2} v = \frac{v \times (v \times \omega)}{\|v\|^2} + \omega$$

Conduisant finalement à:

$$\dot{v} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{\operatorname{tg}(\|v\|)}\right) \omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{2\|v\|^2} + \frac{1}{2} \omega \times v$$

3. GROUPE DE LIE DES ROTATIONS

3.1. Rappels sur la géométrie de SO_3

Le groupe des rotations peut être assimilé au groupe des matrices orthogonales de déterminant +1. Nous ne distinguerons donc pas entre la rotation r et la matrice R correspondante. Sa structure algébrique est bien connue de même qu'il est bien connu que l'on peut le munir d'une structure de variété différentielle qui en fait un groupe de Lie. C'est un exemple classique de groupe de Lie.

Nous rappelons ici un certain nombre de faits. Si v est un vecteur de \mathbb{R}^3 , nous noterons \tilde{v} la matrice antisymétrique associée: avec

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit R_0 une rotation et $t \longrightarrow R(t)$ un chemin différentiable de SO_3 tel que $R(0)=R_0$. Alors il existe un vecteur ω tel que:

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{\omega} R_0$$

Le vecteur ω peut être considéré comme un vecteur vitesse de rotation instantanée.

Si nous posons $R_1(t)=R_0^{-1}R(t)$, $R_1(t)$ est un chemin tel que $R_1(0)=Id$ et $R(t)=R_0R_1(t)=L_{R_0}(R_1(t))$. L'application L_{R_0} étant la translation à gauche dans le groupe SO_3 . Cette application est différentiable et nous noterons sa différentielle L_{R_0*} .

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{\omega} R_0 = L_{R_0*}(\tilde{\omega}) \quad (3.1)$$

d'où

$$L_{R_0*}|_{Id}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} R_0 \quad (3.2)$$

Les égalités précédentes ne sont que des traductions d'une propriété bien connue des groupes de Lie : le fibré tangent d'un tel groupe est trivial et isomorphe dans notre cas à $SO_3 \times \mathbb{R}^3$. L'égalité 3.2 permet de définir sur SO_3 un champ de vecteurs à partir de la donnée d'un vecteur tangent $\tilde{\omega}$ à l'identité par:

$$X(r) = L_{r*}(\tilde{\omega})$$

Un tel champ de vecteur est invariant à gauche (i.e. par translation gauche):

$$X(L_S(r)) = L_{S*}(X(r))$$

pour toute rotation S et tout r . Réciproquement tout champ de vecteurs invariant à gauche est de ce type. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs invariants à gauche étant invariant à gauche, on peut, par identification, munir l'espace vectoriel tangent en l'identité d'une structure d'algèbre de Lie. Cette propriété est générale pour les groupes de Lie et dans le cas de SO_3 nous avons plus précisément:

$$[\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2] = \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_1 = AS(\omega_1 \times \omega_2)$$

L'algèbre de Lie du groupe SO_3 est donc isomorphe à l'algèbre des matrices antisymétriques et à l'algèbre $\{\mathbb{R}^3, +, \times\}$

3.2. La fonction exponentielle

Toute matrice de rotation est l'exponentielle d'une matrice antisymétrique. Plus précisément, étant donnée une matrice de rotation $R \in SO_3$, il existe un vecteur unitaire u et un scalaire Φ tel que $R = \exp(\Phi \tilde{u})$. u est un vecteur unitaire de l'axe de la rotation et Φ une mesure de l'angle de la rotation. Cette dernière remarque implique que l'application $\Phi \longrightarrow \exp(\Phi \tilde{u})$ n'est pas injective, mais si la rotation n'est pas un retournement, (angle \neq de π), il est toujours possible de choisir un couple unique (u, Φ) tel que $0 \leq \Phi < \pi$ et $R = \exp(\Phi \tilde{u})$. En fait, pour tout vecteur unitaire u , l'application $\Phi \longrightarrow \exp(\Phi \tilde{u})$ est périodique de période 2π .

3.3. Atlas de S^3 et atlas de SO_3

Nous avons en 2.4 défini un atlas pour la sphère S^3 . Nous nous proposons ici de construire un atlas correspondant pour SO_3 . Considérons l'application:

$$\begin{aligned} \{ \|v\| < \pi \} &\longrightarrow S^3 \\ v &\longrightarrow \phi_1(v) = \exp\left(\frac{v}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme du disque $\{\|v\| < \pi\}$ sur son image. Il est facile de vérifier que l'image de ϕ_1 ne contient pas de points antipodaux. La restriction de la projection π à cette image est donc injective.

PROPRIETE :

En restriction au disque $\{\|v\| < \pi\}$ nous avons: $\pi \circ \exp(\frac{v}{2}) = \exp(\tilde{v})$, où la première exponentielle est celle des quaternions et la seconde celle des matrices.

La vérification est immédiate.

L'application $v \longrightarrow \exp(\tilde{v})$ est une carte de SO_3 autour de l'identité que nous factorisons ainsi à travers S^3 . Maintenant si ω est un vecteur tangent en $R = \exp(\tilde{v})$ son expression dans la carte exponentielle est:

$$\dot{v} = (1 + \frac{\|v\|}{\operatorname{tg}(\|v\|)})\omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{\|v\|^2} + \omega \times v$$

obtenue en appliquant directement la formule de 2.4.

Remarquons enfin que le domaine de cette carte est $\{SO_3 - Ret\}$ où Ret désigne l'ensemble des rotations d'angle π ou retournements.

3.4. Métrique Riemanienne sur SO_3

La donnée d'un produit scalaire sur l'espace tangent en l'identité permet de définir une métrique Riemanienne sur SO_3 :

$$\langle \tilde{\omega}_1 R_0 \mid \tilde{\omega}_2 R_0 \rangle = \langle \tilde{\omega}_1 \mid \tilde{\omega}_2 \rangle$$

Cette métrique est invariante par translations droite et gauche. C'est à dire que :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\omega}_1 R_0 \mid \tilde{\omega}_2 R_0 \rangle &= \langle L_{R*}(\omega_1 R_0) \mid L_{R*}(\omega_2 R_0) \rangle \\ &= \langle R_{R*}(\omega_1 R_0) \mid R_{R*}(\omega_2 R_0) \rangle \end{aligned}$$

Réciproquement, étant donnée une métrique Riemanienne bi-invariante, il est facile de voir qu'elle est parfaitement définie par la donnée du produit scalaire induit sur l'espace des matrices antisymétriques.

PROPRIETE :

Si SO_3 est muni d'une métrique Riemannienne bi-invariante, les géodésiques γ telles que $\gamma(t)=Id$ sont les applications $t \longrightarrow \exp(t\tilde{\omega})$; $\tilde{\omega}$ étant une matrice antisymétrique.

Cette propriété est la traduction d'une propriété générale pour les groupes de Lie. On pourra en trouver une démonstration dans [SPIV.] p 10-46.

Les géodésiques étant connues, se pose maintenant le problème du plus court chemin entre deux rotations. On pourra toujours se ramener (les translations étant des isométries pour les métriques bi-invariantes) au problème du plus court chemin d'une rotation à l'identité. Examinons le dans le cas du produit scalaire canonique.

Etant donnée une rotation R , nous savons la représenter comme exponentielle $R=\exp(\Phi\tilde{u})$; $\|\tilde{u}\|=1$. Le chemin $t \longrightarrow \exp(t\tilde{u})$ est une géodésique passant par l'identité et :

$$\frac{d}{dt} \left[\exp(t\tilde{u}) \right] = \tilde{u} \exp(t\tilde{u})$$

d'où

$$\left\| \frac{d}{dt} \left[\exp(t\tilde{u}) \right] \right\|^2 = \langle \tilde{u} \exp(t\tilde{u}) | \tilde{u} \exp(t\tilde{u}) \rangle = \langle \tilde{u} | \tilde{u} \rangle = 1$$

La longueur du chemin est donc:

$$\rho(R, Id) = \int_0^\Phi \left\| \frac{d}{dt} \exp(t\tilde{u}) \right\| dt = \Phi$$

Pour un vecteur unitaire u donné, Φ est défini modulo 2π et il y a deux choix possibles de u : u et $-u$. Si $0 \leq \Phi < 2\pi$, Φ et $2\pi - \Phi$ sont deux choix possibles, une seule de ces valeurs est comprise entre 0 et π . Nous obtenons donc:

PROPRIETE :

Si la rotation R n'est pas un retournement, le plus court chemin de Id à R - pour la métrique canonique - est:

$$\begin{array}{ccc} [0, \Phi] & \longrightarrow & SO_3 \\ t & \longrightarrow & \exp(t\tilde{u}) \end{array}$$

où u est tel que $R=\exp(\Phi\tilde{u})$ avec $0 \leq \Phi < \pi$. Si R est un retournement, il existe deux chemins de longueur minimale de Id à R .

Dans les deux cas la distance géodésique de R à l'identité est $\rho(R, Id) = \Phi$; $0 \leq \Phi \leq \pi$.

3.5. Distance géodésique à l'identité et quaternions

Si le quaternion unitaire $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ représente la rotation R , nous pouvons en déduire une représentation de R sous forme exponentielle:

$$R = \exp(\Phi \tilde{u}) \quad \text{avec} \quad \Phi = 2 \operatorname{Arcos}(\lambda_0) u$$

$$\text{soit} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Il en résulte immédiatement:

PROPRIETE :

Si $R = \pi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $\lambda_0 \geq 0$, alors $\rho(R, Id) = 2 \operatorname{Arcos}(\lambda_0)$.

La relation remarquable existant entre la représentation par quaternion et l'écriture d'une rotation comme exponentielle d'une matrice antisymétrique, permet de déterminer un arc $t \longrightarrow \mu(t)$ de la sphère S^3 tel que $t \longrightarrow \pi(\mu(t))$ soit précisément le chemin le plus court entre Id et $R = \pi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_0 > 0$

De $\frac{d}{dt}(\exp(t\tilde{u}) = \tilde{u} \exp(t\tilde{u}))$ il vient immédiatement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\mu(t)) = \frac{1}{2} u \mu(t) \\ \mu(0) = Id \end{cases}$$

C'est une équation "linéaire" à coefficients constants. D'où:

PROPRIETE :

Le plus court chemin entre l'identité et $R = \pi(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; $\lambda_0 \geq 0$; est l'image par π du chemin de S^3 : $t \longrightarrow \exp(\frac{t}{2} u)$ où \exp désigne l'exponentielle des quaternions.

L'exponentielle d'un vecteur étant un quaternion de norme 1, nous avons bien un chemin de S^3 .

3.6. Distance géodésique et plus court chemin entre deux rotations

Soient r_1 et r_2 deux rotations. On souhaite trouver le plus court chemin partant de r_1 et aboutissant à r_2 . La translation gauche étant une isométrie, la distance de r_1 à r_2 est égale à la distance de $L_{r_1^{-1}}(r_1)$ à $L_{r_1^{-1}}(r_2)$ soit de Id à $r_1^{-1}r_2$. De même si $t \longrightarrow \exp(t\tilde{u})$ est le plus court chemin de Id à $r_1^{-1}r_2$, $L_{r_1}(\exp(t\tilde{u}))$ sera un plus court chemin de r_1 à r_2 . Le calcul de \tilde{u} se fait facilement à l'aide des quaternions. Il faut noter toutefois que si $\lambda_i = s_i + v_i$, $i=1,2$ représentent respectivement r_1 et r_2 avec la partie réelle s_i positive pour $i=1,2$, la partie réelle de $\bar{\lambda}_1\lambda_2$ représentant $r_1^{-1}r_2$ peut être de partie réelle négative.

Exemple:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0, 0\right)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}, 0, 0\right)$$

Par contre nous avons la propriété suivante, intéressante en pratique:

PROPRIÉTÉ :

Si la partie réelle de $\lambda_1^{-1}\lambda_2$ est positive et si $t \longrightarrow \lambda(t)$; $t \in [0, \Phi]$ est le plus court chemin de λ_1 à λ_2 , alors pour tout t la partie réelle de $\lambda(t)^{-1}\lambda_2$ est positive.

En effet, soit $s = \text{Re}(\lambda_1^{-1}\lambda_2)$ et $u = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \text{Pu}(\lambda_1^{-1}\lambda_2)$. D'après ce que nous avons vu précédemment, le plus court chemin entre $\pi(\lambda_1)$ et $\pi(\lambda_2)$ est représenté dans les quaternions unitaires par le chemin:

$$t \longrightarrow \lambda_1 \exp\left(\frac{tu}{2}\right) = \lambda(t) ; t \in [0, \Phi] ; \Phi = \text{Arcos}(s)$$

Alors:

$$\begin{aligned} R(\lambda(t)^{-1}\lambda_2) &= R\left(\exp\left(-\frac{tu}{2}\right)\lambda_1^{-1}\lambda_2\right) \\ &= \cos\left(-\frac{t}{2}\right)s - u \sin\left(-\frac{t}{2}\right).P(\lambda_1^{-1}\lambda_2) \\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)s + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sqrt{1-s^2} \\ &= \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(\Phi) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(\Phi) \end{aligned}$$

$$= \cos\left(\Phi - \frac{t}{2}\right)$$

Comme $0 \leq t \leq \Phi \leq \pi$ le résultat en découle immédiatement.

3.7. Autres métriques sur SO_3

Les résultats précédents ont été obtenus dans le cas de la métrique Riemanienne canonique sur SO_3 . Que deviennent-ils si nous considérons une autre métrique Riemanienne bi-invariante ? Premier point: les géodésiques sont inchangées. Le théorème que nous avons invoqué est valable pour toute métrique invariante par translation. (Cela peut sembler étrange mais les droites sont les géodésiques pour tout produit scalaire sur \mathbf{R}^n . C'est d'ailleurs un cas particulier de ce théorème.). Maintenant, la longueur d'une géodésique de l'identité à une rotation r est toujours donnée par:

$$R = \exp(\Phi \tilde{u})$$

$$\rho(Id, R) = \int_0^\Phi \|u\| dt = \Phi \|u\|$$

où la norme correspond à la métrique considérée. Cette longueur sera minimale si u est choisi de façon à ce que $0 \leq \Phi \leq \pi$. Tous les résultats précédents restent donc valables.

4. APPLICATIONS AU CONTROLE SUR LE GROUPE DES ROTATIONS

Nous nous proposons d'appliquer les résultats précédents pour résoudre un certain nombre de problèmes pratiques de contrôle sur le groupe des rotations: changement de l'orientation de l'effecteur d'un robot, changement d'attitude d'un satellite. Nous ne nous posons pas de problèmes de contrôlabilité en considérant que nous contrôlons le vecteur vitesse de rotation dans les modèles du premier ordre et le vecteur accélération de rotation dans les modèles du second ordre. (Quoique qu'il soit possible de contrôler l'attitude d'un satellite, dont le tenseur d'inertie a trois valeurs propres distinctes, à l'aide d'un seul moteur d'attitude, il n'est pas prouvé que cela soit la méthode la plus économique. La durée de vie d'un satellite est très liée à la consommation d'ergols embarqués.).

Le problème est donc de déplacer un solide à point fixe d'une position repérée par une rotation r_0 en une autre position repérée par une rotation r_1 . Si r_0 et r_1 étaient deux points de \mathbf{R}^3 on pourrait résoudre le problème (à condition bien sûr de disposer d'assez de contrôles), en suivant la ligne droite joignant r_0 à r_1 et en ajustant l'accélération en fonction de la distance restant à parcourir. C'est le principe des contrôles proportionnels ou proportionnel-dérivés. Pour transposer ce type de contrôle dans l'espace des rotations, il suffit de remplacer droite par géodésique et distance usuelle (euclidienne) par distance géodésique. Bien sûr ce n'est pas tout à fait aussi simple et des problèmes apparaissent qui n'existaient pas dans le cas où la variété de configuration est \mathbf{R}^3 .

4.1. Modèles du premier ordre

Dans ce type de modèle nous supposons contrôler la vitesse de rotation. Si la rotation $r(t)$ est représentée par le quaternion $\lambda(t)$, le modèle s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega \lambda \\ \omega = u \end{cases}$$

ou

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} u \lambda$$

Dans la représentation matricielle:

$$\frac{dR}{dt} = \tilde{u}R$$

4.1.1. Equation différentielle de la distance géodésique à l'identité

Si $\lambda(t)=(\lambda_0(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t))$, la distance géodésique $\rho(R,Id)$ est fonction de λ_0 :

$$\rho(R,Id)=2\text{Arcos}(\lambda_0(t)) \quad \text{si } \lambda_0(t)>0$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(\rho(\lambda,Id)) = \frac{-2\frac{d\lambda_0}{dt}}{\sqrt{1-\lambda_0^2}}$$

En développant $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega\lambda$ nous obtenons:

$$2\frac{d\lambda_0}{dt} = -(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\lambda_3\omega_3)$$

Ce qui donne:

$$\frac{d}{dt}(\rho(R,Id)) = \frac{\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\lambda_3\omega_3}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}$$

posons :

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix}$$

$a(t)$ est le vecteur unitaire de l'axe de la rotation représentée par $\lambda(t)$ pour lequel l'angle de la rotation est $2\text{Arcos}(\lambda_0(t))$. Il vient alors:

$$\frac{d\rho(R,Id)}{dt} = \langle a(t), \omega(t) \rangle$$

Cette expression n'est pas définie si la rotation est l'identité . Cela est évident dans l'expression de départ ($\lambda_0=1$) et dans l'expression finale le vecteur $a(t)$ n'est pas défini.

4.1.2. Expression dans la représentation matricielle

Si la rotation $r(t)$ est représentée par une matrice $R(t)$, il est également possible d'obtenir la dérivée de la distance géodésique à l'identité. De $\text{tr}(R(t))=1+2\cos(\Phi(t))$ avec $\Phi=\rho(R,Id)$ il vient:

$$\frac{d(tr(R))}{dt} = tr\left(\frac{dR}{dt}\right) = -2 \frac{d\rho(R, Id)}{dt} \sin(\Phi(t))$$

D'autre part $\sin(\Phi)$ est la norme du vecteur associé à la matrice antisymétrique $\frac{1}{2} (R-R^t)$. Donc :

$$(\sin(\Phi))^2 = -\frac{1}{2} tr\left(\frac{1}{4} (R-R^t)^2\right)$$

Soit encore:

$$\sin(\Phi) = \frac{1}{2} \sqrt{3-tr(R^2)}$$

d'où

$$\frac{d\rho(R, Id)}{dt} = \frac{-tr(\tilde{\omega}R)}{\sqrt{3-tr(R^2)}}$$

D'autre part R^2 est une rotation d'angle 2Φ donc:

$$\begin{aligned} tr(R^2) &= 1+2\cos(2\Phi) \\ &= 4\cos^2(\Phi)-1 \\ &= tr(R)(tr(R)-2) \end{aligned}$$

Ceci mène alors à l'expression finale:

$$\frac{d\rho(R, Id)}{dt} = \frac{-tr(\tilde{\omega}R)}{\sqrt{3-tr(R)(tr(R)-2)}}$$

Cette expression n'est pas définie pour $R=Id$ ni si R est un retournement. Dans ces deux cas il est facile de vérifier que $tr(\tilde{\omega}R)=0$ pour toute matrice antisymétrique $\tilde{\omega}$. Nous avons donc une forme indéterminée.

4.1.3. Retour proportionnel pour un premier ordre. Consigne identité.

Traisons d'abord le cas où partant d'une rotation R_0 en $t=t_0$ on désire atteindre l'identité. Pour cela il suffit de suivre une géodésique, donc d'assurer une vitesse colinéaire à $a(t_0)$ et de module proportionnel à la distance géodésique du point courant à l'identité. C'est à dire: $\omega(t)=k\rho(R(t), Id) a(t)$.

L'équation différentielle devient dans la représentation par quaternions:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} k \rho(R(t), Id) a(t) \lambda(t) \\ \lambda(t_0) = R_0 \end{cases}$$

Si R_0 est différent de l'identité, la fonction $\lambda \mapsto k\rho(\pi(\lambda), Id)a(\lambda)\lambda$ est continue au voisinage de $\lambda(t_0)$ tel que $\pi(\lambda(t_0))=R_0$. L'équation différentielle admet donc localement une solution unique. Comme de plus le champs de vecteurs $\frac{1}{2}\omega\lambda$ est toujours tangent à la sphère S^3 qui est compacte, ce champs de vecteurs est complet. Toute solution est donc définie sur $[t_0, +\infty[$. Ceci est également immédiat si on considère la représentation matricielle car nous avons alors un champs de vecteurs C^∞ sur une variété compacte.

L'équation différentielle vérifiée par la distance géodésique à l'identité est:

$$\frac{d\rho(R(t), Id)}{dt} = k\rho(R(t), Id)$$

Par conséquent, si nous choisissons $k < 0$ nous assurons une convergence exponentielle (au sens de la distance) de $R(t)$ vers l'identité. Il reste toutefois un petit problème: le contrôle proposé n'est pas défini pour $R(t)=Id$. En fait:

$$\lim_{R \rightarrow Id} \rho(R, Id) a(R) = 0$$

En effet, si $R=\pi(\lambda)$ avec $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_0 > 0$ nous avons:

$$\rho(R, Id) a(R) = \frac{2 \operatorname{Arcos}(\lambda_0)}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Si $R \rightarrow Id$ alors $\lambda_0 \rightarrow 1$ et $\lambda_i \rightarrow 0, i=1,2,3$. Il est alors facile de vérifier que

$$\frac{2 \operatorname{Arcos}(\lambda_0)}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} \rightarrow 1$$

Un dernier point reste à vérifier: La trajectoire dans l'espace des rotations est bien une géodésique. L'équation différentielle dans l'espace des matrices est:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = k\rho(R, Id)\tilde{a}(t)R(t) \\ R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

Cette équation différentielle est du type

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = A(t) M(t) \\ A(t_0) = A_0 \end{cases}$$

On sait, d'après la théorie des équations différentielles linéaires, que cette équation admet une solution unique.

Soient

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_0^2(t_0)}} \begin{pmatrix} \lambda_1(t_0) \\ \lambda_2(t_0) \\ \lambda_3(t_0) \end{pmatrix} \quad ; \quad \rho_0 = 2\text{Arcos}(\lambda_0(t_0))$$

le vecteur unitaire de l'axe de la rotation R_0 et la distance géodésique de R_0 à l'identité.

Considérons

$$t \longrightarrow \exp(e^{k(t-t_0)} \rho_0 \tilde{a}_0)$$

Il est facile de vérifier que cette fonction est solution de l'équation différentielle et donc l'unique solution. Il est tout aussi facile de vérifier que le chemin correspondant est le plus court chemin de R_0 à l'identité.

4.1.4. Retour proportionnel pour un premier ordre - consigne quelconque .

Si la consigne n'est plus l'identité mais une rotation R_1 il suffit d'appliquer les considérations précédentes à la rotation $R'_0 = R_0 R_1^{-1}$. On obtient ainsi un chemin $t \longrightarrow R'(t)$ de R'_0 à l'identité. Le chemin $t \longrightarrow R(t) = R'(t) R_1$ est alors le plus court chemin de R_0 à R_1 et de plus :

$$\frac{dR}{dt} = \rho(R(t), R_1) \tilde{a}(R(t) R_1^{-1}) R(t)$$

A partir de cette équation on vérifie aisément que le contrôle $\omega(t) = \rho(R(t), R_1) \tilde{a}(R(t) R_1^{-1}) R(t)$ permet de suivre le plus court chemin de R_0 à R_1 , la distance géodésique entre les deux rotations vérifiant l'équation différentielle :

$$\frac{d\rho}{dt} = k\rho$$

En conclusion, nous sommes capables de nous déplacer d'une rotation R_0 à une rotation R_1 en contrôlant la vitesse angulaire de telle façon que la distance géodésique du point courant à la consigne ait une dynamique linéaire. Les expressions obtenues montrent qu'il est plus facile pour cela d'utiliser la représentation des rotations par des quaternions. Toutefois, cet algorithme n'est pas satisfaisant car il présente des problèmes numériques au voisinage de la consigne ($\lambda_0 \longrightarrow 0$). Nous nous proposons donc

de le remplacer par un autre ne présentant pas cet inconvénient.

4.1.5. Retour proportionnel modifié.

L'algorithme précédent peut être facilement modifié en remarquant que $\text{Arcos}(x)$ et $\sqrt{1-x^2}$ sont relativement voisins sur $[0,1]$. Leur rapport varie de $\frac{\pi}{2}$ à 1. Considérons donc le retour proportionnel suivant

$$\begin{cases} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1}{2} \omega(t) \lambda(t) & \lambda_0(t) > 0 \\ \omega(t) = k \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par le quaternion est :

$$\begin{cases} \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1}{2} k P(\lambda(t)) \lambda(t) \\ \lambda(t_0) \text{ tel que } \lambda_0(t_0) > 0; \quad \pi(\lambda_0(t_0)) = R_0 \end{cases}$$

Le second membre de l'équation différentielle étant continu et même C^∞ elle admet une solution locale unique et le champ de vecteurs étant toujours tangent à la sphère S^3 , le champ de vecteur est complet.

Il est alors facile de calculer:

$$\frac{d\lambda_0(t)}{dt} = -\frac{1}{2} k \|P(\lambda(t))\|^2 = -\frac{1}{2} k (1 - \lambda_0(t)^2)$$

La distance géodésique de $\lambda(t)$ à l'identité vérifie alors l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(\lambda(t), Id)}{dt} &= \langle a(t), \omega(t) \rangle \\ &= \langle a(t), k \sqrt{1 - \lambda_0(t)^2} a(t) \rangle \\ &= k \frac{\sqrt{1 - \lambda_0(t)^2}}{2 \text{Arcos}(\lambda(t))} \rho(\lambda(t), Id) \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{1 - \lambda_0(t)^2}}{2 \text{Arcos}(\lambda(t))}$ est bornée inférieurement par $1/\pi$ et supérieurement par $1/2$ donc:

$$\frac{d\rho(\lambda(t), Id)}{dt} \leq \frac{k}{\pi} \rho(\lambda(t), Id)$$

Le lemme de Gronwald permet alors d'écrire:

$$\rho(\lambda(t), Id) \leq \rho(\lambda(t_0), Id) \exp(k/\pi(t-t_0))$$

montrant ainsi la décroissance exponentielle de la distance géodésique entre $\lambda(t)$ et Id .

Il nous reste maintenant à examiner la trajectoire. Un calcul direct à partir de l'équation différentielle donne :

$$\frac{dP(\lambda(t))}{dt} = -\lambda_0 P(\lambda(t))$$

équation dont la solution est :

$$P(\lambda(t)) = \exp \left[-\int_{t_0}^t \lambda_0(s) ds \right] P(\lambda(t_0))$$

Ceci montre que toutes les rotations $R(t) = \pi(\lambda(t))$ ont même axe et par conséquent le chemin $t \longrightarrow R(t)$ est une géodésique.

En utilisant la représentation des rotations par des quaternions il est donc possible d'obtenir un algorithme de contrôle assurant une décroissance exponentielle de la distance géodésique à la consigne et une trajectoire suivant une géodésique.

4.2. MODELES DU SECOND ORDRE

Les modèles considérés sont maintenant du type:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega \lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = u \end{cases}$$

ou en représentation matricielle:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = \tilde{\omega} R \\ \frac{d\omega}{dt} = u \end{cases}$$

La grandeur de commande est donc l'accélération angulaire.

4.2.1. Commande proportionnelle dérivée avec consigne identité

L'étude précédente sur les modèles du premier ordre nous permet d'envisager, en vue d'étendre les commandes proportionnelle-dérivées classiques aux rotations, un contrôle du type:

$$u = k_p \rho(R(t), Id) a(t) + k_v \omega$$

avec $k_p < 0$ et $k_v < 0$. Soit dans la représentation par quaternions:

$$u = k_p \frac{2sg(\lambda_0) \text{Arcos}|\lambda_0|}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} P(\lambda) + k_v \omega$$

Existence de solutions pour une telle commande

Nous avons:

$$\frac{d\omega}{dt} = k_p \rho(R(t), Id) a(t) + k_v \omega$$

si $R(t) \neq Id$ et

$$\frac{d\omega}{dt} = k_v \omega$$

si $R(t) = Id$. Le champ de vecteurs étant continu sur $S^3 \times \mathbb{R}^3$ il existe une solution unique définie sur un intervalle $[t_0, t_1[$ vérifiant $R(t_0) = R_0$, $\omega(t_0) = \omega_0$. Alors pour tout $t \in [t_0, t_1[$:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= e^{(k_v(t-t_0))} \omega_0 + k_p \int_{t_0}^t e^{(k_v(t-s))} \rho(R(s), Id) a(s) ds \\ &= e^{(k_v(t-t_0))} \omega_0 + 2k_p e^{(k_v t)} \int_{t_0}^t e^{(-k_v s)} sg(\lambda_0) \frac{\text{Arcos}|\lambda_0|}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} P(\lambda(s)) ds \end{aligned}$$

L'intégrand étant borné nous avons alors:

$$\|\omega(t)\| \leq e^{(k_v(t-t_0))} \|\omega_0\| + 2|k_p| M e^{(k_v t)} \int_{t_0}^t e^{(-k_v s)} \|P(\lambda(s))\| ds$$

Comme $\|P(\lambda(s))\| \leq 1$

$$\|\omega(t)\| \leq e^{(k_v(t-t_0))} \|\omega_0\| + 2 \frac{|k_p| M}{|k_v|} [1 - e^{(k_v(t-t_0))}]$$

La vitesse de rotation ω reste donc toujours bornée et d'autre part $\lambda(t)$ appartient à une variété compacte. L'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \omega \lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p \frac{2sg(\lambda_0) \text{Arcos}|\lambda_0|}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} P(\lambda) + k_v \omega \end{cases}$$

a une solution définie sur $[t_0, +\infty[$

Points d'équilibre

Il est facile de vérifier que les seuls points d'équilibre du champs de vecteurs sont: $(1,0,0,0)$ et $(-1,0,0,0)$ avec $\omega = 0$ dans les deux cas. Il ne leur correspond qu'un seul point d'équilibre dans le groupe des rotations : $R = Id$, $\omega = 0$.

Stabilité des points d'équilibre

Considérons l'équation différentielle sur le groupe des rotations et exprimons la dans la carte exponentielle $v \mapsto \exp(\tilde{v})$. En utilisant les résultats de 3.1 nous obtenons:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = (1 + \frac{\|v\|}{tg(\|v\|)})\omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{\|v\|^2} + \omega \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p v + k_v \omega \end{cases}$$

car $\lambda_0 = R(\exp(\frac{v}{2})) = \cos(\frac{\|v\|}{2})$ avec $\|v\| < \pi$ et donc $\lambda_0 > 0$ sur le domaine considéré.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $(v=0, \omega=0)$ considérons l'approximation au premier ordre du champ de vecteur en $(0,0)$. Celle ci se calcule facilement:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 2\omega \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p v + k_v \omega \end{cases}$$

C'est un double intégrateur avec commande proportionnelle dérivée. Un choix judicieux de k_p et k_v permet de le rendre asymptotiquement stable. Ce même choix rendra le point d'équilibre du système initial asymptotiquement stable.

d'autant moins que nous avons exprimé le champ de vecteurs en d'autant moins que nous avons exprimé le champs en coordonnées locales.

Nous ne poursuivrons pas plus avant l'étude de ce type de commande car, comme dans les modèle du premier ordre, l'expression $\frac{\text{Arcos}(|\lambda_0|)}{\sqrt{1-\lambda_0^2}}$ pose des problèmes numériques.

4.2.2. Commande proportionnelle dérivée approchée

Considérons donc les commandes du type:

$$u = k_p s g(\lambda_0) P(\lambda) + k_v \omega$$

Existence de solutions

Pour les mêmes raisons que précédemment il existe des solutions définies sur un intervalle $[t_0, t_1[$ et:

$$\omega(t) = e^{k_v(t-t_0)} \omega_0 + k_p \int_{t_0}^t e^{k_v(t-s)} s g(\lambda_0(s)) P(\lambda(s)) ds$$

Ce qui donne:

$$\|\omega\| \leq e^{k_v(t-t_0)} \|\omega_0\| + \frac{|k_p|}{|k_v|} [1 - e^{k_v(t-t_0)}]$$

La vitesse ω reste bornée, ce qui implique comme précédemment l'existence de solutions définies sur $[t_0, +\infty[$.

Points d'équilibre

Les points d'équilibre sont $(1,0,0,0)$ et $(-1,0,0,0)$ pour l'équation différentielle sur les quaternions et Id pour l'équation différentielle sur les rotations.

Stabilité des points d'équilibre

Considérons encore la carte exponentielle soit autour de $(1,0,0,0)$, soit autour de Id suivant l'équation différentielle étudiée.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{2 \operatorname{tg}(\|v\|/2)} \right) \omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{2\|v\|^2} + \frac{1}{4} \omega \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p \frac{\sin(\|v\|)}{\|v\|} v + k_v \omega \end{cases}$$

Ici encore utilisons l'approximation au premier ordre du champ de vecteur au voisinage de $v=0, \omega=0$.

Nous obtenons:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p v + k_v \omega \end{cases}$$

Pour un choix convenable de k_p et k_v , le point d'équilibre de l'équation différentielle sur les rotations est donc asymptotiquement stable. Ici encore nous ne pouvons préciser le domaine d'attraction, mais les simulations semblent indiquer qu'il s'agit d'un attracteur global.

Propriétés supplémentaires de la commande

La propriété suivante montre que les rotations trajectoires de l'équation différentielle sont très rapidement "quasiment de même axe":

PROPRIETE

Si $k_v < 0$, $\|\omega \times P(\lambda)\|$ tend exponentiellement vers zéro.

En effet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\omega \times P(\lambda)) &= \frac{d\omega}{dt} \times P(\lambda) + \omega \times \frac{d(P(\lambda))}{dt} \\ &= (k_p P(\lambda) s g(\lambda_0) + k_v \omega) \times P(\lambda) + \omega \times \left(\frac{1}{2} \omega \times P(\lambda) + \frac{1}{2} \lambda_0 \omega \right) \\ &= k_v (\omega \times P(\lambda)) + \frac{1}{2} (\omega \times (\omega \times P(\lambda))) \end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\frac{d}{dt}(\|\omega \times P(\lambda)\|^2) = 2k_v \|\omega \times P(\lambda)\|^2$$

et donc

$$\|\omega \times P(\lambda)\|^2 = e^{2k_v t} \|\omega \times P(\lambda)\|^2_{t=0}$$

Il en résulte également que si ω et $P(\lambda)$ sont colinéaires à un instant t_0 , ils restent colinéaires pour tout $t \geq t_0$. En particulier si $\omega(t_0) = 0$, ω et $P(\lambda)$ restent colinéaires pour tout $t \geq t_0$.

Egalement si la consigne $R = Id$ est atteinte à un certain moment t_0 , pendant tout le reste du mouvement (en cas de suroscillations par exemple) ω et $P(\lambda)$ restent colinéaires. Dans les deux cas les trajectoires sont des géodésiques.

Comportement si la vitesse initiale est nulle

Nous savons déjà que ω et $P(\lambda)$ restent colinéaires. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{dP(\lambda)}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega \times P(\lambda) + \lambda_0 \omega) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0 \omega\end{aligned}$$

$\frac{dP(\lambda)}{dt}$ et $P(\lambda)$ sont colinéaires et donc $P(\lambda)$ est porté par une droite fixe. D'autre part d'après 4.1.a

$$\frac{d\rho(R, Id)}{dt} = \langle a(t), \omega(t) \rangle$$

et si $R(t)$ ne passe pas par un retournement le vecteur $a(t)$ est toujours défini et constant. Alors:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} &= \langle a(t), \frac{d\omega}{dt} \rangle \\ &= \langle a, (k_p P(\lambda) + k_v \omega) \rangle \\ &= k_p \|P(\lambda)\| + k_v \frac{d\rho}{dt} \\ &= k_p \sin(\rho) + k_v \frac{d\rho}{dt}\end{aligned}$$

Si k_p et k_v sont bien choisis négatifs, cette équation différentielle admet une solution décroissante $\rho(t)$

si bien que $\rho(t_0) < \pi$ implique pour tout t , $\rho(t) < \pi$ (car $\frac{d\rho}{dt} = 0$ pour $t=0$). Dans le cas où $\rho(t_0) = \pi$, le

choix arbitraire de $sg(0)$ revient à choisir le vecteur $a(t_0)$ parmi les deux possibles. Alors

$(\frac{d^2\rho}{dt^2})_{t=t_0} = k_p \|P(\lambda)\|_{t=t_0}$ est négative et donc les considérations précédentes s'appliquent pour le

reste de la trajectoire.

Nous avons donc complètement résolu le problème du changement d'attitude d'un repère.

5. APPLICATION EN ROBOTIQUE ET AU CONTROLE D'ATTITUDE DES SATELLITES

5.1. Application en robotique

5.1.1. Contrôle d'attitude de l'objet manipulé

L'application essentielle en robotique est le contrôle d'attitude de l'effecteur du manipulateur ou de tout autre corps porté par le manipulateur (outil, caméra ...etc). Le calcul du quaternion représentant l'orientation de l'organe terminal a été présenté en [LEB]. La commande en attitude d'un objet manipulé pose au moins deux problèmes. Le premier est celui de la définition d'un objectif de commande. Une méthode courante en robotique est de spécifier une trajectoire idéale ou désirée. Les algorithmes étudiés en 4 permettent la génération d'une telle trajectoire à partir d'un modèle de référence du premier ou second ordre.

Le deuxième problème est d'assurer la réalisation de l'objectif de commande. Ceci est assuré usuellement par un feedback calculé à partir de l'erreur entre la trajectoire désirée et la trajectoire réelle. Les considérations développées au chapitre 3 permettent de fonder sur des bases géométriques sérieuses, une notion d'erreur d'orientation et mettent en lumière les difficultés liées à cette notion, difficultés résultant essentiellement de la non unicité du plus court chemin entre deux rotations différent d'un retournement.

Si on choisit une trajectoire idéale de l'attitude en position et vitesse, soit $\lambda_r(t), \omega_r(t)$ un quaternion représentant l'attitude et la vitesse angulaire désirée à l'instant t . Soit $(\lambda(t), \omega(t))$ la trajectoire de l'attitude réelle de l'objet manipulé. L'erreur de poursuite sera alors:

$$\lambda_e(t) = \lambda^{-1}(t)\lambda_r(t)$$

$$\omega_e(t) = \omega_r(t) - \omega(t)$$

Certaines techniques de commande utilisent une fonction de sortie qu'elles cherchent à annuler. Si on s'intéresse à l'attitude de l'objet manipulé, cette fonction pourra comporter le vecteur $P(\lambda_e(t))$ que l'on cherchera à annuler. Rappelons que $P(\lambda_e(t))$ ne donne la direction du plus court chemin vers la rotation identité que si $R(\lambda_e(t)) > 0$. Le produit de deux quaternions à parties réelles positives n'étant pas nécessairement à partie réelle positive, on devra s'assurer que l'on a toujours $R(\lambda_e(t)) > 0$ sous peine

d'avoir une fonction de sortie discontinue. De toute façon, on n'évitera pas les discontinuités au passage des retournements.

5.1.2. Stabilités et instabilités locales de l'algorithme de Paul, Luh et Walker.

Les auteurs précités ont proposé dans [LUH] un algorithme de commande de l'attitude de l'effecteur d'un manipulateur utilisant comme erreur d'attitude le vecteur e tel que (cf 1.6):

$$\tilde{e} = \frac{1}{2}(R_e - R_e^t) = \sin(\Phi)\tilde{u}$$

où R_e est la matrice de la rotation correspondant à λ_e . Après découplage et linéarisation des équations du manipulateur par feedback non linéaire, le modèle pour l'attitude est du second ordre avec une commande du type:

$$u = k_p e + k_v \omega$$

La première remarque que l'on peut faire sur l'erreur d'orientation utilisée est qu'elle s'annule quand R_e est un retournement. C'est à dire précisément quand la distance entre attitude désirée et attitude réelle est maximale au sens de la distance géodésique!. En contrepartie, il n'y a plus de discontinuité.

Les équations du modèle rebouclé sont alors:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega\lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p e + k_v \omega \end{cases}$$

De diverses relations obtenues en 1.6 nous tirons:

$$e = 2\lambda_0 P(\lambda)$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega\lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p \lambda_0 P(\lambda) + k_v \omega \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont: $(Id, \omega=0)$ ou bien $(ret, \omega=0)$ où *ret* désigne un retournement.

Intéressons nous maintenant à la stabilité du point d'équilibre $(Id, 0)$, la démonstration donnée en

[LUH] ne nous semblant pas convainquante. En utilisant encore la carte exponentielle, l'équation d'évolution du système exprimée en coordonnées locales est:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{2 \operatorname{tg}(\|v\|/2)}\right) \omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{4} \omega \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = 2k_p \cos\left(\frac{\|v\|}{2}\right) \frac{v}{\|v\|} \sin\left(\frac{\|v\|}{2}\right) + k_v \omega \end{cases}$$

Soit:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{2 \operatorname{tg}(\|v\|/2)}\right) \omega + \frac{v \times (v \times \omega)}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{4} \omega \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p \frac{\sin(\|v\|)}{\|v\|} v + k_v \omega \end{cases}$$

L'approximation linéaire au voisinage de ce point d'équilibre donne encore:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p v + k_v \omega \end{cases}$$

Ce qui montre la stabilité asymptotique locale de la commande si k_p et k_v sont bien choisis, en particulier négatifs. Le comportement au voisinage du point d'équilibre sera également très proche du comportement obtenu par la commande étudiée en 4.2.2.

Examinons maintenant la stabilité des points d'équilibre de la forme $(ret, 0)$. Le domaine de la carte exponentielle utilisée jusqu'ici étant $SO_3 - Ret$, il est nécessaire d'introduire une autre carte. En utilisant le fait que toute translation à gauche L_{r_0} est un difféomorphisme, nous pouvons transformer la carte $\Phi: v \longrightarrow \Pi(\exp(\frac{v}{2}))$ définie autour de $r=Id$ en une carte $\Theta: v \longrightarrow r_0 \Pi(\exp(\frac{v}{2}))$ définie autour de $r=r_0$. En particulier si r_0 est un retournement représenté par le quaternion μ , cette carte autour de $r_0=\Pi(\mu)$ est:

$$\Theta: v \longrightarrow \Pi(\mu \exp(\frac{v}{2})); \quad \|v\| < \pi$$

ou encore $L_{r_0} \circ \Phi$. Elle a pour inverse $\Phi^{-1} \circ L_{\mu}^{-1} = \Phi^{-1} \circ L_{\mu}$ de différentielle $d\Phi^{-1} \circ dL_{\mu}$. La matrice jacobienne de Φ^{-1} a été calculée en 2.5 et 3.3, la translation gauche L_{μ} est une application linéaire et est donc égale à sa différentielle. (Ceci peut d'ailleurs se vérifier par calcul brutal. NB: on calcule dans l'espace ambiant H).

$$dL_{\bar{\mu}}(\dot{\lambda}) = \bar{\mu}\dot{\lambda}$$

comme d'autre part $\dot{\lambda}$ est l'image par $d\Pi^{-1}$ de $\dot{\omega}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\omega\lambda$$

nous avons:

$$dL_{\bar{\mu}}(\dot{\lambda}) = \frac{1}{2}\bar{\mu}\omega\lambda$$

λ étant le point courant représentant la rotation $\Pi(\mu \exp(\frac{v}{2}))$, $\lambda = \mu \exp(\frac{v}{2})$ ce qui nous permet

d'exprimer la vitesse angulaire ω dans la carte Θ :

$$\dot{v} = d\Phi^{-1}|_{\exp(\frac{v}{2})} \left(\frac{1}{2}\bar{\mu}\omega\mu \exp(\frac{v}{2}) \right)$$

ce qui n'est autre que la vitesse de rotation $\bar{\mu}\omega\mu = r_0^{-1}\omega$ en $\Pi(\exp(\frac{v}{2}))$ calculée dans la carte Φ .

D'après 3.3:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{2\operatorname{tg}(\|v\|/2)} \right) \bar{\mu}\omega\mu + \frac{v \times (v \times \bar{\mu}\omega\mu)}{2\|v\|^2} + \frac{1}{4}\bar{\mu}\omega\mu \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = 2k_p\lambda_0 P(\lambda) + k_v\omega \end{cases}$$

de sorte que tenant compte de $R(\lambda)=0$ car λ représente un retournement, il vient:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -P(\mu) \cdot \frac{v}{\|v\|} \sin\left(\frac{\|v\|}{2}\right) \\ P(\lambda) &= P(\mu) \times \frac{v}{\|v\|} \sin\left(\frac{\|v\|}{2}\right) + \cos\left(\frac{\|v\|}{2}\right) P(\mu) \end{aligned}$$

Finalement l'expression du système rebouclé dans la carte Θ est:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|v\|}{2\operatorname{tg}(\|v\|/2)} \right) \bar{\mu}\omega\mu + \frac{v \times (v \times \bar{\mu}\omega\mu)}{2\|v\|^2} + \frac{1}{4}\bar{\mu}\omega\mu \times v \\ \frac{d\omega}{dt} = -2k_p P(\mu) \cdot \frac{v}{\|v\|} \sin\left(\frac{\|v\|}{2}\right) (P(\mu) \times \frac{v}{\|v\|} \sin\left(\frac{\|v\|}{2}\right) + \cos\left(\frac{\|v\|}{2}\right) P(\mu)) + k_v\omega \end{cases}$$

Le calcul de l'approximation linéaire au voisinage de $v=0, \omega=0$ donne alors:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \bar{\mu}\omega\mu \\ \frac{d\omega}{dt} = -k_p P(\mu) \cdot v + k_v\omega \end{cases}$$

ou encore en posant $P(\mu)=p$ avec $\|p\|=1$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 2(\omega.p)p - \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -k_p(p.v)p + k_v\omega \end{cases}$$

Considérons $\alpha=v.p$ et $\beta=\omega.p$ les projections respectives de v et ω sur le vecteur unitaire constant p .

Des équations précédentes nous déduisons:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -k_p\alpha + k_v\omega \end{cases}$$

La stabilité du point d'équilibre $r=Id, \omega=0$ impose de choisir k_v et k_p négatifs. Avec un tel choix, l'équation caractéristique du système ci dessus a une racine réelle strictement positive. Les projections de v et ω sur le vecteur fixe p n'étant pas bornées, l'approximation linéaire du système initial n'est donc pas asymptotiquement stable et par conséquent le point d'équilibre $\Pi(\mu), \omega=0$ n'est donc pas stable pour le système d'origine.

5.2. Application au contrôle d'attitude des satellites

5.2.1. Equations cinématiques d'un satellite

On ne considère que le cas d'un satellite rigide ou du moins des modes rigides d'un satellite muni d'appendices flexibles comme c'est généralement le cas. Les équations cinématiques établies en 2.1 supposent la vitesse de rotation exprimée dans le repère de référence R_0 . S'agissant d'un satellite, on préfère en général exprimer cette vitesse dans le repère R_s du satellite. L'attitude du satellite ou du repère R_s par rapport au repère R_0 étant donnée par la rotation r_{0s} représentée par le quaternion λ , il vient:

$$[\omega]_0 = r_{0s}[\omega]_s = \lambda\omega\lambda^{-1}$$

D'autre part en 2.1 nous avons établi que:

$$[\dot{\lambda}]_0 = \frac{1}{2}[\omega]_0\lambda$$

Ce qui donne:

$$[\dot{\lambda}]_0 = \frac{1}{2} \lambda [\omega]_s$$

Posant encore $[\omega]_s = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$ nous obtenons en développant:

$$\dot{\lambda}_0 = -\frac{1}{2} [\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3]$$

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2} [\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2]$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2} [\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3]$$

$$\dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2} [\lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1]$$

Les actionneurs du satellite étant portés par celui ci, il convient également d'exprimer l'erreur d'attitude dans le repère du satellite car la commande devra elle aussi être exprimée dans ce repère.

Soit λ_A un quaternion représentant l'attitude désirée par rapport à R_0 . Alors l'erreur d'attitude est $\lambda \lambda_A^{-1}$ exprimée dans le repère R_0 avec $R(\lambda \bar{\lambda}_A) > 0$. La direction de cette erreur d'attitude est $P(\lambda \bar{\lambda}_A)$. Exprimée dans le repère du satellite cela donne:

$$\begin{aligned} [P(\lambda \bar{\lambda}_A)]_s &= r_{s0} [P(\lambda \bar{\lambda}_A)]_0 = \bar{\lambda} [P(\lambda \bar{\lambda}_A)]_0 \lambda \\ &= P(\bar{\lambda} \lambda \bar{\lambda}_A \lambda) \end{aligned}$$

d'après 1.3

$$= P(\bar{\lambda}_A \lambda)$$

Comme d'autre part $R(\bar{\lambda}_A \lambda) = R(\lambda \bar{\lambda}_A)$ l'expression de l'erreur d'attitude dans le repère du satellite est donc $\bar{\lambda}_A \lambda$ avec $R(\bar{\lambda}_A \lambda) > 0$.

5.2.2. Equations dynamiques

Les actionneurs d'attitude des satellites peuvent être de différent types. Nous n'examinerons ici que les actionneurs à jets de gaz et les roues de réaction. Nous simplifierons encore le problème en supposant que les jets de gaz peuvent être modulés de façon continue.

Pour obtenir les équations d'attitude dynamique du satellite dans le cas d'actionneurs à jets de gaz, il suffit d'appliquer le théorème du moment cinétique dans le repère du satellite. Si u est le moment engendré par les actionneurs et J le tenseur d'inertie du satellite:

$$u = J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J \omega$$

Dans le cas de roues de réaction le problème est un peu plus compliqué car le mouvement du satellite réagit sur les roues de réaction. Nous nous contenterons de citer les équations dynamiques:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \omega \times J \omega + \omega \times J_W \Omega + u = 0$$

$$J_W \frac{d\Omega}{dt} + J_W \frac{d\omega}{dt} = u$$

où $J_W = \begin{bmatrix} J_{W_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{W_2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{W_3} \end{bmatrix}$ représente les moments d'inertie des roues de réaction, $\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}$ leurs

vitesse angulaires respectives et u les moments engendrés par les roues de réaction.

5.2.3. Commande d'attitude d'un satellite

Commande par jets de gaz

La commande proposée s'inspire du découplage nonlinéaire utilisé en commande des robots manipulateurs rigides et présente la même simplicité. Nous supposons que l'attitude et la vitesse de rotation du satellite sont mesurées. Il suffit alors pour transformer le modèle du satellite en un modèle plus simple identique à celui considéré en 4.2, d'appliquer le feedback:

$$u = \omega \times J \omega + J v$$

où v est un nouveau contrôle. Les équations d'état:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \lambda \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -J^{-1}(\omega \times J \omega) + J^{-1} u \end{cases}$$

deviennent alors après rebouclage:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \lambda \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = v \end{cases}$$

En prenant $v = k_p P(\bar{\lambda}_A \lambda) + k_v \omega$ on retrouve la commande étudiée en 4.2.

Commande par roues de réaction

Nous supposons ici que vitesse, attitude et vitesse des roues de réaction sont mesurée. La commande proposée procède alors du même esprit:

$$u = - \omega \times J \omega - \omega \times J_w \Omega - J v$$

On est encore ramené à des équations d'état étudiées en 4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[BER]

Berger, Cours de géométrie.

[LEB]

Le Borgne Michel, Modélisation des robots manipulateurs rigides. Pub. Int. IRISA 1984.

[LUH]

Luh J.Y.S., Walker M.W., Paul R.P.C., Resolved acceleration control of mechanical manipulators.
IEEE Trans. on Aut. Contr., Vol AC.25, nb 3, Dec 82.

[SPIV]

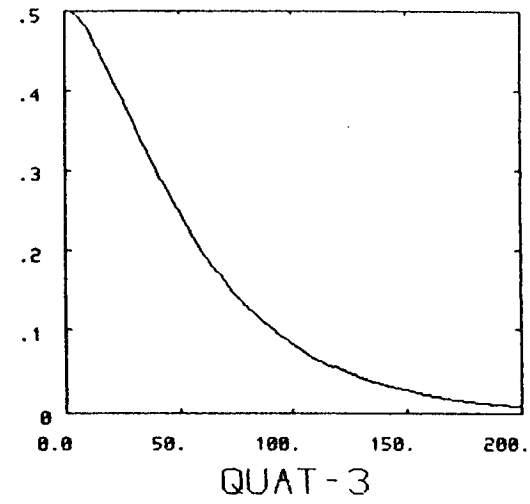
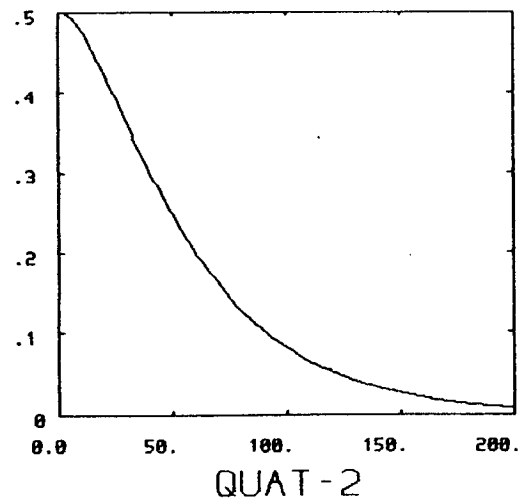
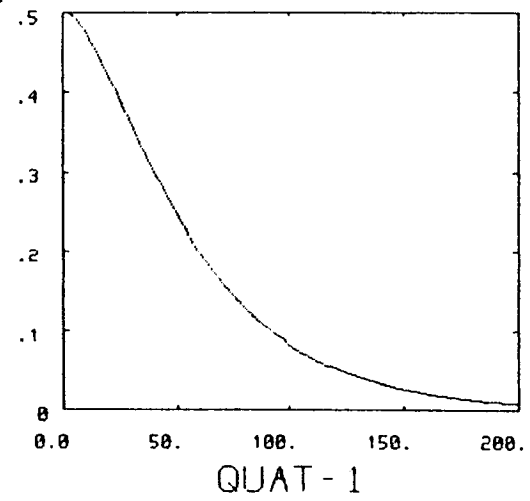
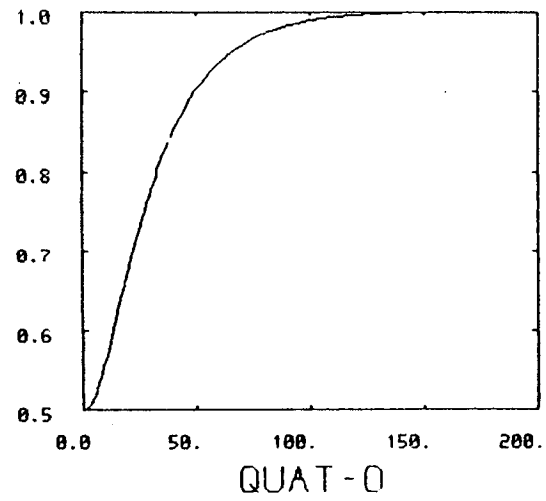
Spivack Michael, Differential Geometry.

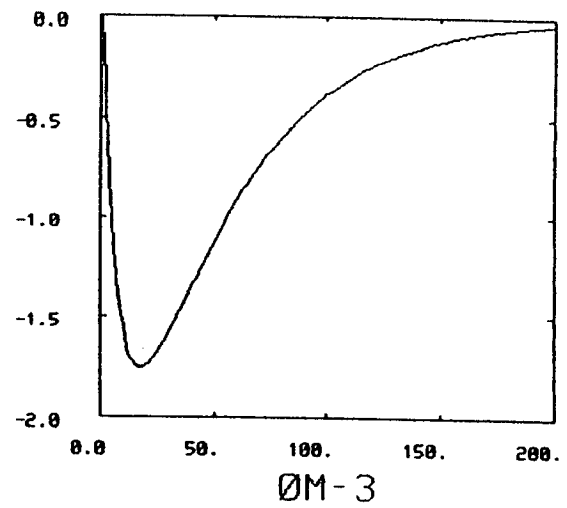
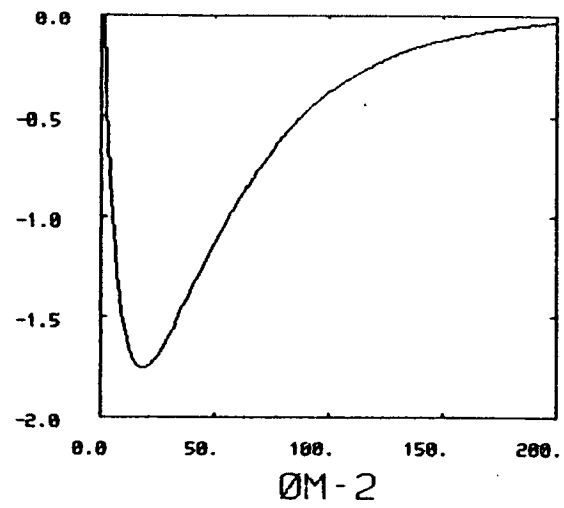
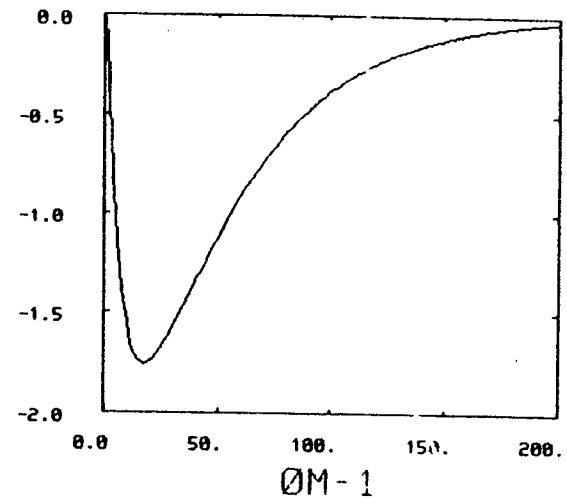
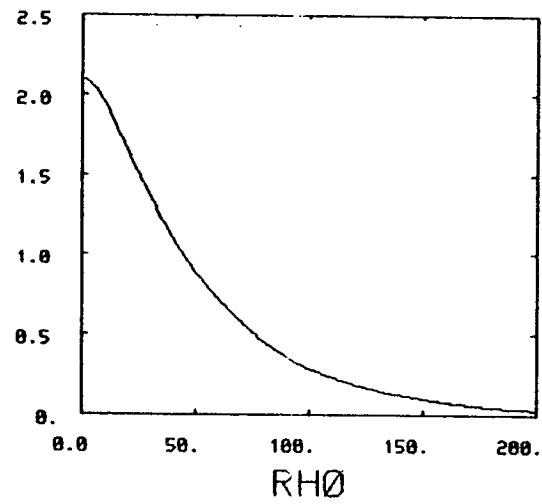
ANNEXE 1 : SIMULATIONS

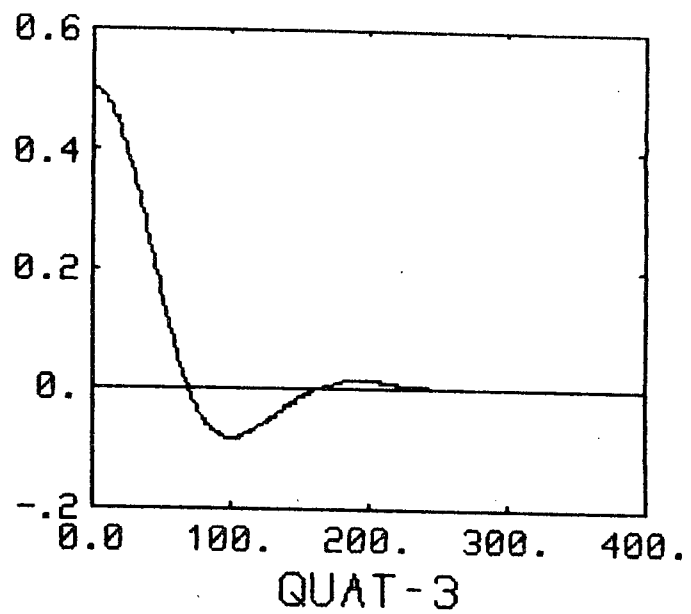
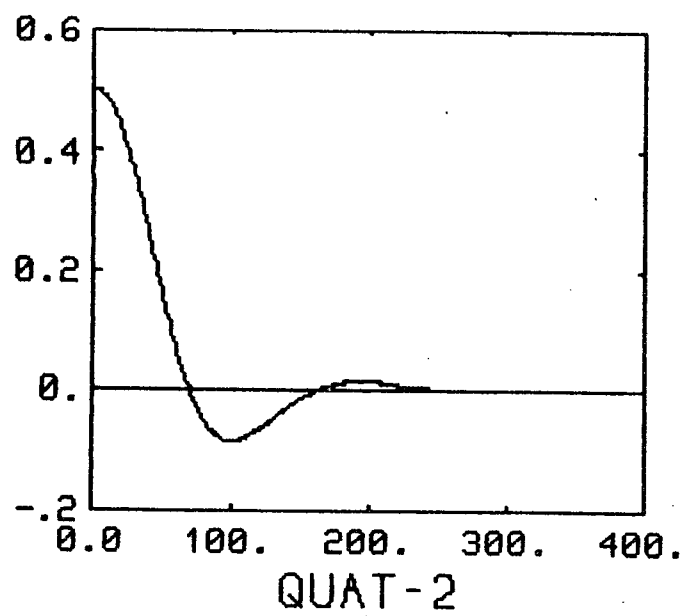
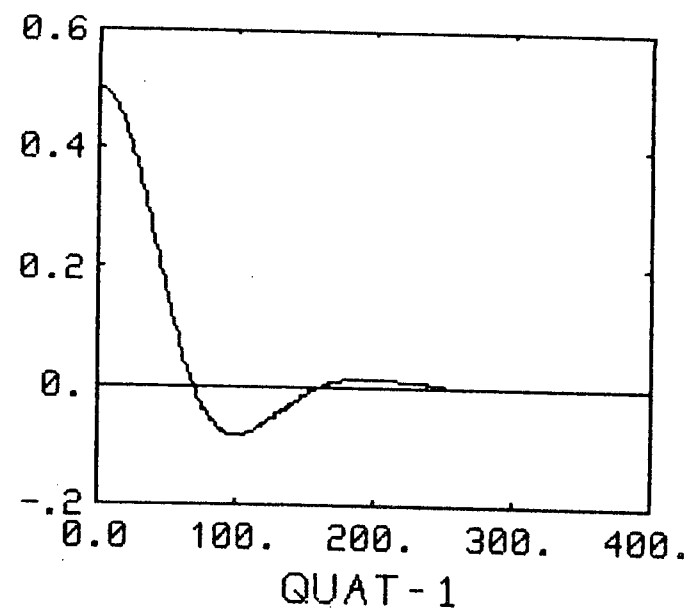
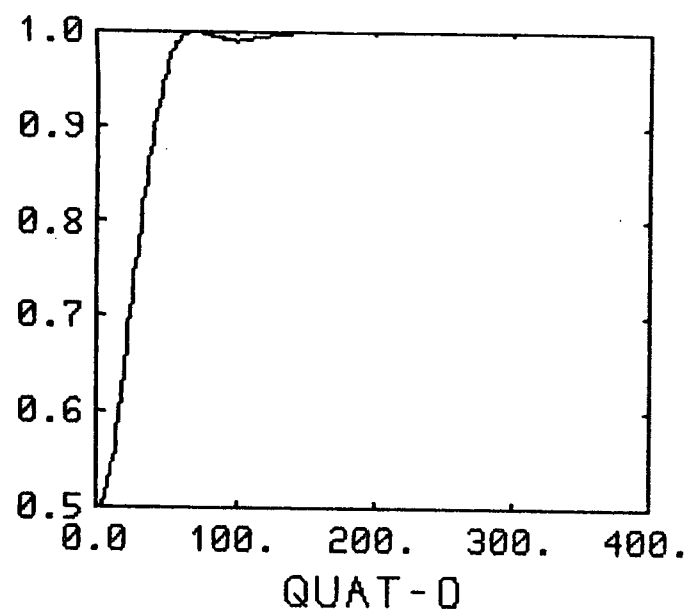
Les pages qui suivent présentent quelques résultats de simulation. Ces simulations utilisent toutes une commande discrétisée. Les deux premières ont trait à un système du second ordre comme décrit en 4.2. Les quatre premières courbes (QUAT-i) donnent l'évolution des composantes du quaternion. La courbe RHO est la distance géodésique à l'identité et OM-i sont les composantes du vecteur vitesse de rotation. La période d'échantillonnage est 0.01s et la première simulation utilise $k_p=16$, $k_v=8$. (amortissement critique). La deuxième simulation présente un cas de sous amortissement ($k_p=20, k_v=4$). Les comportements observés sont tout à fait semblable aux comportements d'un système linéaire.

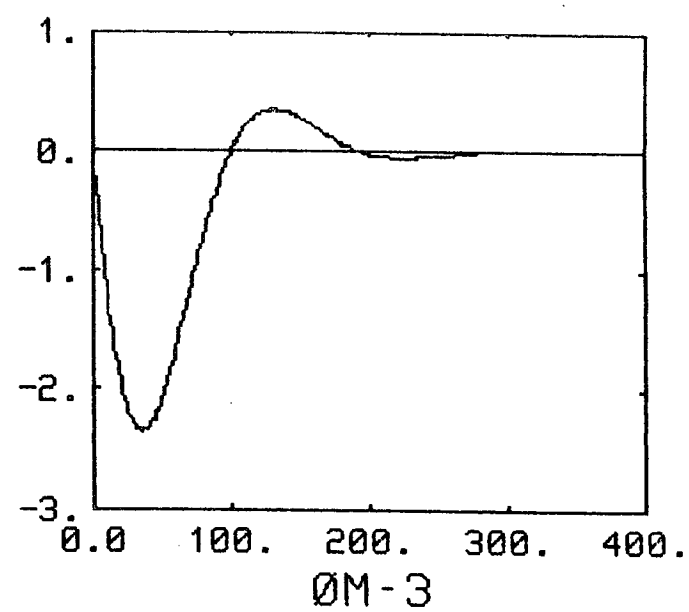
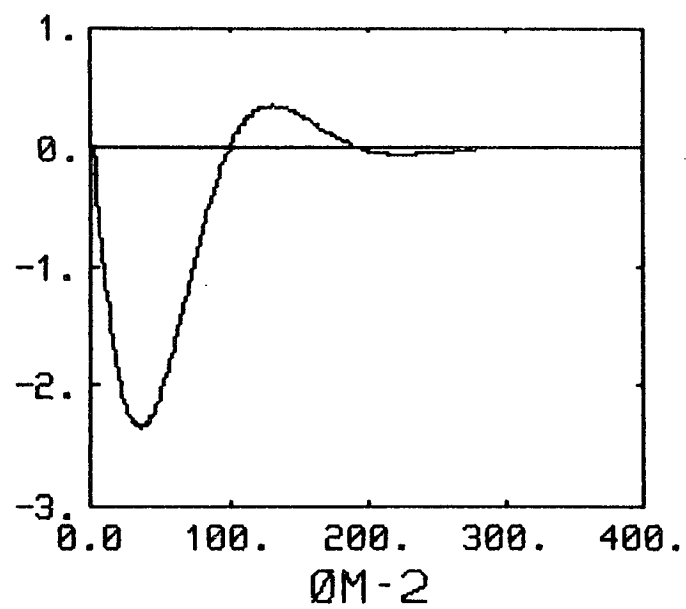
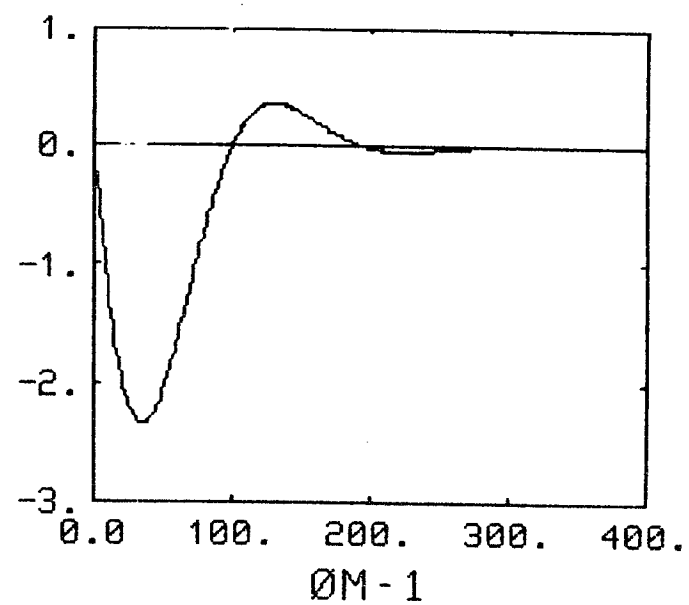
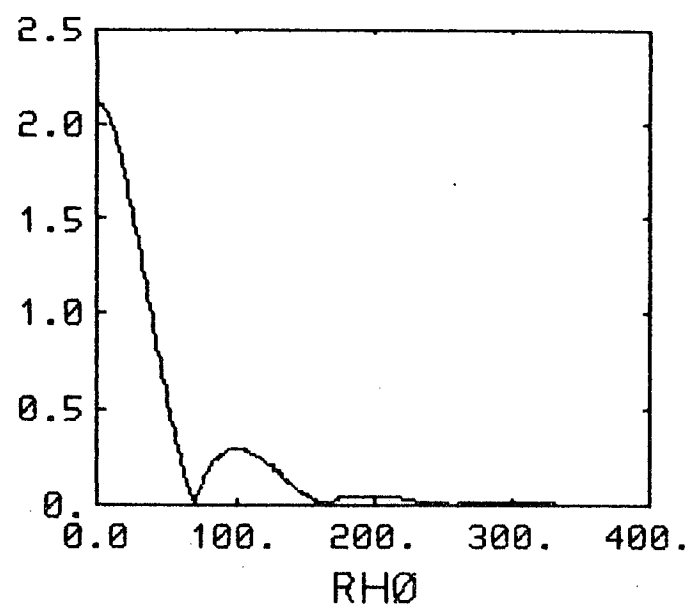
La deuxième famille de courbes est le résultat de la simulation d'un changement d'attitude d'un satellite. Le repère du satellite est le repère principal d'inertie et donc le tenseur d'inertie est diagonal avec $J_{11}=200$, $J_{22}=150$, $J_{33}=100$ ($kg.m^2$). Les premières courbes décrivent l'évolution du quaternion, les suivantes, U_i , sont les commandes en N.m et la dernière la distance géodésique. La période d'échantillonnage est 0.1s. Les gains sont réglés pour un amortissement critique. La commande a les défauts d'une commande proportionnelle-dérivée: elle exige un couple important au démarrage et pendant un instant relativement bref.

QUAT

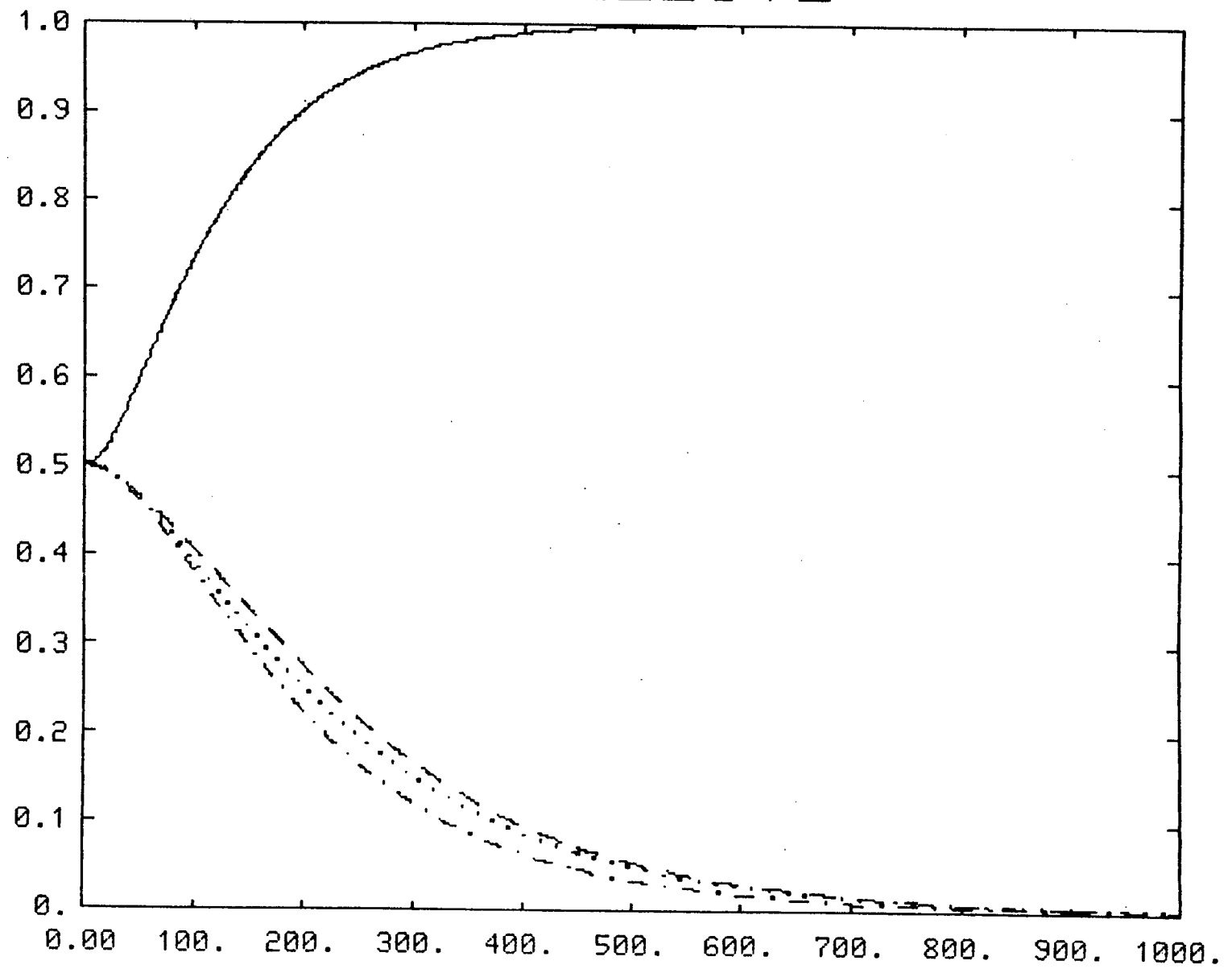




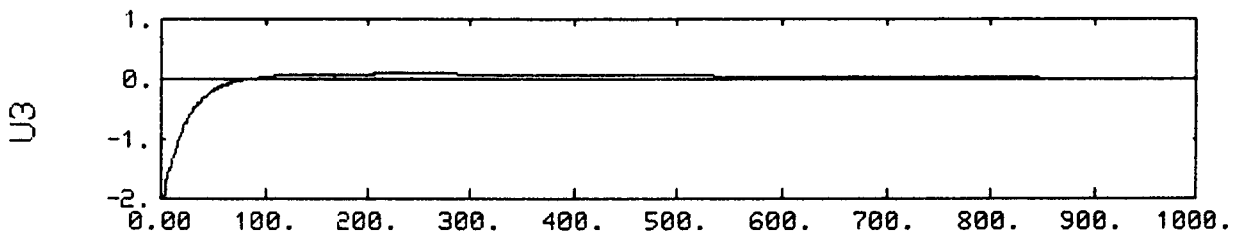
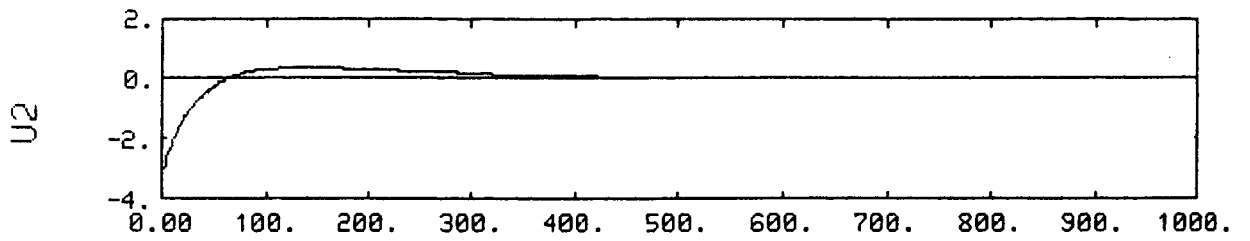
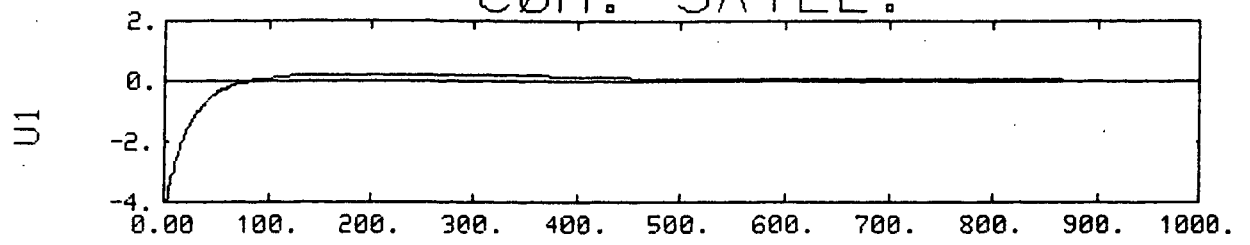




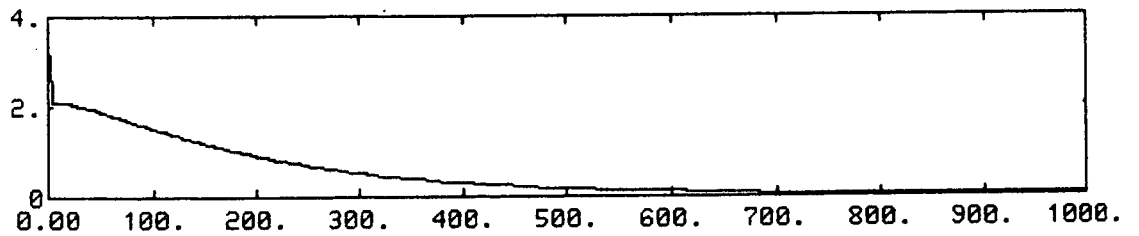
SATELLITE



CØM. SATEL.



RHØ SATEL.



ANNEXE 2 : UTILISATION DES CARTES STEREOGRAPHIQUES

1. Les cartes stéréographiques

Comme nous nous intéressons à la stabilité locale du point d'équilibre $R=Id$ de l'équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega\lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p s g(\lambda_0) P(\lambda) + k_v \omega \end{cases}$$

toute carte autour de ce point peut convenir. En 4 nous avons utilisé la carte exponentielle. Nous pouvons également tirer parti du fait que π est un difféomorphisme local de la sphère S^3 dans SO_3 pour utiliser une carte bien connue de S^3 autour d'un des points de $\pi^{-1}(Id)$. Un atlas couramment utilisé sur la sphère est l'atlas stéréographique.

Soit $\Omega = \{\lambda/\lambda_0 > 0\}$. Ω est un ouvert et la restriction de π à cet ouvert est un difféomorphisme de Ω sur son image. La carte stéréographique de pôle $(-1,0,0,0)$ est alors une application de Ω dans l'hyperplan $\{\lambda/\lambda_0 = 0\}$. L'image d'un point λ est l'intersection de la droite passant par λ et le pôle $(-1,0,0,0)$ avec l'hyperplan. Il est facile de montrer que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0+1} \\ y &= \frac{\lambda_2}{\lambda_0+1} \\ z &= \frac{\lambda_3}{\lambda_0+1} \end{aligned}$$

où (x,y,z) sont les coordonnées de l'image dans \mathbf{R}^3 assimilé à $(0,x,y,z)$. L'application réciproque associe à (x,y,z) son image $\lambda(x,y,z)$ définie par:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -1 + \frac{2}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \lambda_1 &= \frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \lambda_2 &= \frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ \lambda_3 &= \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1}\end{aligned}$$

Pour calculer le champs de vecteurs dans la carte, il est nécessaire de calculer $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ qui forment une base de l'espace tangent à S^3 en $\lambda(x,y,z)$. Il vient:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \begin{bmatrix} 2x \\ (x^2-y^2-z^2-1) \\ 2xy \\ 2xz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \begin{bmatrix} 2y \\ (y^2-x^2-z^2-1) \\ 2xy \\ 2yz \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \begin{bmatrix} 2z \\ (z^2-x^2-y^2-1) \\ 2xz \\ 2yz \end{bmatrix}$$

Pour simplifier les calculs suivants, exprimons ces trois vecteurs en fonction des composantes de λ :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\lambda_1(\lambda_0+1) \\ (\lambda_0+1)-\lambda_0^2 \\ -\lambda_1\lambda_2 \\ -\lambda_1\lambda_3 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \begin{bmatrix} -\lambda_2(\lambda_0+1) \\ -\lambda_2\lambda_1 \\ (\lambda_0+1)-\lambda_2^2 \\ -\lambda_3\lambda_2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \begin{bmatrix} -\lambda_3(\lambda_0+1) \\ -\lambda_3\lambda_1 \\ -\lambda_3\lambda_2 \\ (\lambda_0+1)-\lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant un vecteur tangent $v=(v_0,v_1,v_2,v_3)$ à la sphère S^3 en $\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ aussi:

$$\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

Un calcul immédiat donne les coordonnées de v dans la base $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\lambda_0+1)} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - v_0 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Revenant aux coordonnées (x,y,z) de la carte nous obtenons:

$$[v]_{(x,y,z)} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+1) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} - \frac{2v_0}{(x^2+y^2+z^2+1)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2. Application à l'équation différentielle

Rappelons cette équation différentielle:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\omega \lambda \\ \frac{d\omega}{dt} = k_p \operatorname{sg}(\lambda_0) P(\lambda) + k_v \omega \end{cases}$$

Elle définit un champ du second ordre sur SO_3 . Considérons ce champ de vecteurs sur $\pi(\Omega)$ ou dans

la représentation par quaternion sur Ω . Le calcul de la partie réelle et de la partie pure de $\frac{d\lambda}{dt}$ donne:

$$\frac{d\lambda}{dt} = (-\omega \cdot P(\lambda), \omega \times P(\lambda) + \lambda_0 \omega)$$

et $\frac{d\lambda}{dt}$ est un vecteur tangent de S^3 à λ . L'application des résultats précédents donne:

$$\left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_{(x,y,z)} = \omega \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-1)\omega - \frac{4}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \langle \omega, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rangle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{d\omega}{dt} \right] = \frac{2k_p}{(x^2+y^2+z^2+1)} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + k_v \omega$$

L'approximation linéaire autour de $(0,0,0), \omega=0$ coordonnées de $(Id, \omega=0)$ dans la carte s'obtient alors facilement:

dt

Ce système linéaire est donc un double intégrateur et il est possible de choisir les gains k_p and k_v de

façon à ce que le système soit asymptotiquement stable. Pour ces choix, le système initial est localement asymptotiquement stable.

